

# Mathematische Schwungslehre.

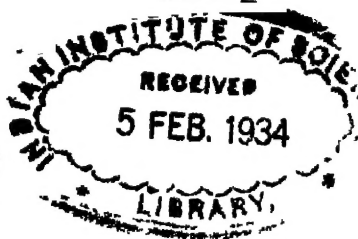
Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen  
mit konstanten Koeffizienten sowie einiges  
über partielle Differentialgleichungen  
und Differenzengleichungen

Von

G. - 3 1134

Dr. Erich Schneider

Mit 49 Textabbildungen



Berlin  
Verlag von Julius Springer  
1924

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung  
in fremde Sprachen, vorbehalten.  
Copyright 1924 by Julius Springer in Berlin.

5362

5362

11-4

## Vorwort.

Das Buch behandelt die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit Rücksicht auf ihre Anwendungen in Physik und Technik, ohne jedoch selbst Anwendungen zu geben. Nur Pendel, Doppelpendel und Wage sind etwas näher erörtert, um die Theorie zu illustrieren, im übrigen sei aber bezüglich der Anwendungen verwiesen auf:

Hort: Technische Schwingungslehre. Berlin Julius Springer,  
und auf folgende Lehrbücher:

Abraham: Theorie der Elektrizität. Leipzig: B. G. Teubner. — Föppl: Vorlesungen über technische Mechanik. Leipzig: B. G. Teubner. — Hamel: Elementare Mechanik. Leipzig: B. G. Teubner. — Lorenz: Technische Physik. München und Berlin: Oldenbourg. — Love: Lehrbuch der Elastizität. Leipzig: B. G. Teubner. — Schaefer: Einführung in die theoretische Physik. Leipzig: Veit & Comp.

Diese Bücher werden im Text häufig zitiert werden.

Von den Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten enthält das Buch im IV Kapitel nur diejenigen, die sich auf Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zurückführen lassen. Bezüglich der Schwingungsprobleme, die auf andere Differentialgleichungen führen, sei verwiesen auf:

Duffing, G.: Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Braunschweig: Vieweg & Sohn. — Hamel, G.: Über erzwungene Schwingungen bei endlichen Amplituden. Math. Ann. 86, 1922. — Hamel, G.: Über die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Math. Ann. 73, 1912,

sowie auch auf die Lehrbücher der Besselschen Funktionen.

Im V Kapitel sollte bloß gezeigt werden, wie sich die partiellen Differentialgleichungen auf gewöhnliche zurückführen lassen.

Im übrigen sei bezüglich der partiellen Differentialgleichungen verwiesen auf:

Weber: Die partiellen Differentialgleichungen der theoretischen Physik. Braunschweig: Vieweg & Sohn.

Im VI Kapitel wird gezeigt, daß sich die Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten in analoger Weise behandeln lassen wie die Differentialgleichungen. Weitere Literatur über Differenzengleichungen findet man in:

Funk: Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen. Berlin: Julius Springer.

Berlin, im Oktober 1923

E. Schneider.

# Inhaltsverzeichnis.

## I. Kapitel. Gewöhnliche Differentialgleichungen; Schwingungen bei einem Freiheitsgrade.

### A. Homogene Gleichungen; freie Schwingungen

§ 1	$a\ddot{y} + cy = 0$ ; ungedämpfte Schwingungen	Seite 1
§ 2	Die Grenzbedingungen . . . . .	5
§ 3	$a\ddot{y} - cy = 0$ , aperiodische Bewegungen .	11
§ 4.	Die Grenzbedingungen im aperiodischen Fall	13
§ 5.	$a\ddot{y} + by + cy = 0$ , lineare Dämpfung	15
§ 6.	Die Energie . . . . .	20
§ 7.	$ay'''' + cy = 0$	22
§ 8.	$ay'''' - cy = 0$ ; Stabschwingungen	23
§ 9.	$ay'''' + by'' + cy = 0$ .	26
§ 10.	$\sum_{i=1}^p a_i \frac{d^i y}{dx^i} = 0$	28

### B Inhomogene Gleichungen; erzwungene Schwingungen.

§ 11.	$b\dot{y} + cy = C$ , Schließungsextrastrom . . . . .	30
§ 12.	$a\ddot{y} + cy = C$ ; konstante Dämpfung . . . . .	31
§ 13.	$b\dot{y} + cy = C \sin(\gamma + \omega t)$ , Wechselstrom	32
§ 14.	$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = C \sin(\gamma + \omega t)$ ; erzwungene Schwingungen mit linearer Dämpfung	34
§ 15	$y'' = F(x)$ . . . . .	37
§ 16.	$y'' + \omega^2 y = F(x)$	39
§ 17.	$\sum_{i=0}^p a_i \frac{d^i y}{dx^i} = \sum_{\mu} C_{\mu} e^{m_{\mu} x}$ . . . . .	41
§ 18.	$\sum_{i=0}^p a_i \frac{d^i y}{dx^i} = \sum_{\gamma} C_{\gamma} x^{\gamma}$	43
§ 19.	$\sum_{i=0}^p a_i \frac{d^i y}{dx^i} = \sum_{\gamma} \sum_{\mu} C_{\gamma\mu} x^{\gamma} e^{m_{\mu} x}$	45
§ 20.	$\sum_{i=0}^p a_i \frac{d^i y}{dx^i} = F(x)$	47

## II. Kapitel. Systeme von 2 gewöhnlichen Differentialgleichungen; Schwingungen bei 2 Freiheitsgraden.

§ 1.	$\left. \begin{aligned} a_1 \ddot{y}_1 + c_1 y_1 &= 0 \\ a_2 \ddot{y}_2 + c_2 y_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$ ungekoppelte Schwingungen	49
§ 2	$\left. \begin{aligned} a_{11} \ddot{y}_1 + c_{11} y_1 + a_{12} \ddot{y}_2 &= 0 \\ a_{21} \ddot{y}_1 + a_{22} \ddot{y}_2 + c_{22} y_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$ Beschleunigungskopplung	50

§ 3	$a_{11}\ddot{y}_1 + c_{11}y_1 + c_{12}y_2 = 0$ $c_{21}y_1 + a_{22}\ddot{y}_2 + c_{22}y_2 = 0$	Kraftkopplung	Seite 53
§ 4.	$a_{11}\ddot{y}_1 + c_{11}y_1 + a_{12}\ddot{y}_2 + c_{12}y_2 = 0$ $a_{21}\ddot{y}_1 + c_{21}y_1 + a_{22}\ddot{y}_2 + c_{22}y_2 = 0$	Beschleunigungs- und Kraftkopplung	55
§ 5.		Geometrische Deutung der Resultate	58
§ 6.		Die Lagrangeschen Gleichungen 1. Form	64
§ 7.	$a_{11}\ddot{y}_1 + c_{11}y_1 + b_{12}y_2 = 0$ $b_{21}y_1 + a_{22}\ddot{y}_2 + c_{22}y_2 = 0$	Geschwindigkeitskopplung	68
§ 8	$a_{11}\ddot{y}_1 + b_{11}y_1 + c_{11}y_1 + a_{12}\ddot{y}_2 + b_{12}y_2 + c_{12}y_2 = 0$ $a_{21}\ddot{y}_1 + b_{21}y_1 + c_{21}y_1 + a_{22}\ddot{y}_2 + b_{22}y_2 + c_{22}y_2 = 0$	Beschleunigungs-, Geschwindigkeits- u. Kraftkopplung	70
§ 9		Tabellen für die Gleichung 4. Grades	73
§ 10		Die Lagrangeschen Gleichungen, 2. Form	77
§ 11.		Lose Kopplung	80
§ 12		Geringe Dämpfung	83
§ 13	$a_{11}\ddot{y}_1 + c_{11}y_1 + a_{12}\ddot{y}_2 + c_{12}y_2 = C \sin(\gamma + \omega t)$ $a_{21}\ddot{y}_1 + c_{21}y_1 + a_{22}\ddot{y}_2 + b_{22}y_2 + c_{22}y_2 = 0$	Erzwungene Schwingungen bei Beschleunigungs- u. Kraftkopplung	85
§ 14	$a_{11}\ddot{y}_1 + c_{11}y_1 + b_{12}y_2 = C \sin(\gamma + \omega t)$ $b_{21}y_1 + a_{22}\ddot{y}_2 + b_{22}y_2 + c_{22}y_2 = 0$	Erzwungene Schwingungen b. Geschwindigkeitskopplung	88

### III. Kapitel. Systeme von mehr als 2 gewöhnlichen Differentialgleichungen; Schwingungen bei mehr als 2 Freiheitsgraden

§ 1.	$y_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3$ $y_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + c_{23}y_3$ $y_3 = c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3$	$c_{pq} = c_{qp}$ Der symmetrische Tensor	90
§ 2		Integralgleichungen und Fouriersche Reihen	101
§ 3.	$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3$ $a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + c_{23}y_3$ $a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 = c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3$	$a_{pq} = a_{qp}$ { Der unsymmetrische Tensor $c_{pq} = c_{qp}$	104
§ 4	$\sum_q a_{pq}\ddot{y}_q + \sum_q b_{pq}y_q + \sum_q c_{pq}y_q = 0$		110
§ 5	$\sum_{q=1}^m \sum_{i=0}^h a_{pq}^{(i)} \frac{d^i y_q}{dt^i} = 0 \quad (p = 1 \dots m)$		112
§ 6		Lose Kopplung	116
§ 7.		Geringe Dämpfung	118
§ 8	$\sum_{q=1}^m \sum_{i=0}^h a_{pq}^{(i)} \frac{d^i y_q}{dt^i} = \sum_{y=1}^k C_{py} e^{m_y t} \quad (p = 1 \dots m)$	Erzwungene Schwingungen	119

#### IV. Kapitel. Differentialgleichungen, die sich auf solche mit konstanten Koeffizienten zurückführen lassen.

	Seite
§ 1. Änderung der unabhängigen Variablen	121
§ 2. Änderung der abhängigen Variablen	126
§ 3. Änderung beider Variablen, quadratische Dämpfung	128

#### V. Kapitel. Partielle Differentialgleichungen; Schwingungen stetig zusammenhängender Systeme.

§ 1. $a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$ , die schwingende Saite	131
§ 2. Fortschreitende und stehende Wellen	134
§ 3. $\sum_i a_i \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} + \sum_\gamma b_\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial t_\gamma^2} = 0$	137
§ 4. Variationsproblem I Einfache Integrale	139
§ 5. $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$	141
§ 6. $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = C$ , Torsion	143
§ 7. $a \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + cw = 0$ , Membranschwingungen	150
§ 8. Variationsproblem II Doppelintegrale	152
§ 9. Krümmung Koordinaten in der Ebene	159
§ 10. $r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + r \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = 0$	163
§ 11. $r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + r \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = Cr^2$	164
§ 12. $a \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + cw = 0$ ; Wellengleichung	166
§ 13. Variationsproblem III. Dreifache Integrale	167
§ 14. Krümmung Koordinaten im Raume	169
§ 15. $r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial w}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = 0$	173

#### VI. Kapitel. Differenzengleichungen.

§ 1. Differenzen	173
§ 2. Differenzengleichungen 1. Form	178
§ 3. Differenzengleichungen 2. Form · Zurückführung auf die 1. Form	181
§ 4. Differenzengleichungen 2. Form Direkte Lösung	183
§ 5. Partielle Differenzengleichungen	187
§ 6. Angenäherte Integration von Differentialgleichungen	189
VII Kapitel Anhang	190
Berechtigungen	194

# I. Kapitel.

## Gewöhnliche Differentialgleichungen<sup>1)</sup>.

### § 1. $a\ddot{y} + cy = 0$ .

Die Gleichung ist die Differentialgleichung der ungedämpften Schwingung. Die Punkte bedeuten Differentiationen nach der Zeit.  $a$  und  $c$  sollen beide positiv sein.  $a\ddot{y}$  ist das Beschleunigungsglied und  $cy$  das Kraftglied. Das Integral der Differentialgleichung ist

$$(1) \quad y = K \cos \omega t + L \sin \omega t.$$

Hierbei sind  $K$  und  $L$  willkürliche Konstanten und  $\omega$  ist so zu bestimmen, daß die Differentialgleichung erfüllt wird. Zu dem Zweck bilde ich

$$(2) \quad \begin{aligned} y &= \omega (-K \sin \omega t + L \cos \omega t), \\ \ddot{y} &= -\omega^2 y. \end{aligned}$$

Setze ich (2) in unsere Differentialgleichung ein, so ist

$$(3) \quad -a\omega^2 + c = 0.$$

Daraus folgt

$$(4) \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Die Konstanten  $K$  und  $L$  müssen nun aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden. Ist zur Zeit  $t = 0$   $y = y_0$  und  $\dot{y} = \dot{y}_0$ , so ist

$$(5) \quad \begin{aligned} y_0 &= K, \\ \dot{y}_0 &= \omega L \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$(6) \quad y = y_0 \cos \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t$$

---

<sup>1)</sup> Vgl. zu diesem Kapitel das 3. Kapitel im Forsyth, „Lehrbuch der Differentialgleichungen“, Braunschweig, Vieweg & Sohn. Die dort benutzte symbolische Methode ist aber wohl nicht nach jedermanns Geschmack.

Führe ich statt der Konstanten  $K$  und  $L$  neue Konstante  $k$  und  $\kappa$  ein durch die Gleichungen

$$(7) \quad \begin{aligned} K &= k \sin \kappa \\ L &= k \cos \kappa, \end{aligned}$$

$$(8) \quad \begin{aligned} k &= \sqrt{K^2 + L^2} \\ \operatorname{tg} \kappa &= \frac{K}{L}, \end{aligned}$$

so kann ich (1) auf die folgende Form bringen.

$$(9) \quad y = k \sin(\kappa + \omega t).$$

Das ist eine sog Sinusschwingung (Abb 1).  $k$  ist die Amplitude,  $\kappa + \omega t$  die Phase und  $\omega$  die Frequenz. Für die Schwingungsdauer  $\tau$  ergibt sich

$$(10) \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}}.$$

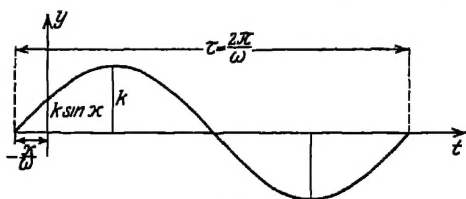


Abb. 1.

Ändere ich in (9) die willkürliche Konstante  $\kappa$

um  $\frac{\pi}{2}$ , so tritt an Stelle

des sin der cos

Sind  $x$  und  $y$  2 Lösungen unserer Differentialgleichung, so ist auch

$z = x + iy$  eine Lösung, weil die Koeffizienten  $a$  und  $c$  der Differentialgleichung reell sind. Man kann den Vorgang geometrisch übersichtlich darstellen, wenn man sich dieser Lösung  $z$  bedient. Ich schreibe

$$(11) \quad x = k \cos(\kappa + \omega t)$$

$$(12) \quad y = i k \sin(\kappa + \omega t)$$

und addiere

$$(13) \quad x + iy = z = k[\cos(\kappa + \omega t) + i \sin(\kappa + \omega t)] = k e^{i(\kappa + \omega t)}$$

Jede komplexe Zahl kann man nun als einen Punkt  $P$  darstellen oder, wie man auch sagen kann, als einen vom Koordinatenanfangspunkt ausgehenden Vektor  $OP$ . Unser Vektor  $z$  hat die Länge  $k$  und schließt mit der Achse des Reellen den Winkel  $(\kappa + \omega t)$  ein. Mit der Zeit  $t$  dreht er sich also aus der Anfangslage  $k e^{i\kappa}$  mit der konstanten Geschwindigkeit  $\omega$ . Die



Punkte  $Q$  und  $R$  führen dabei einfache Schwingungen aus (Abb 2). Aus (13) folgt nun

$$(14) \quad z = i\omega k e^{i(\kappa + \omega t)} = i\omega z = e^{i\frac{\pi}{2}} \omega z.$$

Durch Differentiation wird also der Vektor  $z$  um  $90^\circ$  gedreht und mit  $\omega$  multipliziert. Durch nochmalige Differentiation ergibt sich

$$(15) \quad \ddot{z} = i\omega z = -\omega^2 z.$$

Durch zweimalige Differentiation wird also der Vektor  $z$  um  $180^\circ$  gedreht und mit  $\omega^2$  multipliziert. Ich hatte also in unserer Differentialgleichung auch den komplexen Ansatz  $z = k e^{i(\kappa + \omega t)}$  machen können und wäre dadurch genau so auf die Gl. (3) gekommen

Analog erhalte ich

$$(16) \quad \int z dt = \frac{z}{i\omega} = -i \frac{z}{\omega} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \frac{z}{\omega}$$

Durch Integration wird also der Vektor  $z$  um  $90^\circ$  in entgegengesetzter Richtung gedreht und durch  $\omega$  dividiert

Bilde ich 2 Funktionen

$$(17) \quad \begin{aligned} 2E &= ay^2, \\ 2V &= cy^2, \end{aligned}$$

so folgt unsere Differentialgleichung aus der Gleichung

$$(18) \quad \frac{d}{dt}(E + V) = 0.$$

In der Physik stellt die Gl. (18) den Satz von der Erhaltung der Energie dar.

### Beispiele.

I Bei mechanischen Schwingungen bedeutet  $E$  die kinetische Energie und  $V$  die potentielle Energie

1. Hangt an einem elastischen Stabe eine Masse  $m$  und führt Schwingungen aus, so gilt unsere Differentialgleichung nach dem Hookschen Gesetz, falls die Masse  $m$  gegen die Masse des Stabes vernachlässigt werden kann. Die Zahl  $a$  ist gleich der angehängten Masse  $m$  und das  $c$  ist je nach der Befestigungsart verschieden Vgl. Hutte, Des Ingenieurs Taschenbuch (Berlin,

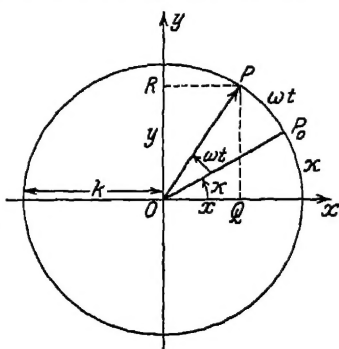


Abb. 2.

Ernst & Sohn) I, 547, wo die Durchbiegung angegeben ist. D Durchbiegung ist aber  $\frac{m}{c}$ .

Ähnliche Verhältnisse liegen bei Spiralfedern vor. Vg Hutte, I, 597.

2 Bei Drehschwingungen ergibt sich zunächst die Gleichung

$$a \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + c \sin \varphi = 0,$$

wobei  $a$  das Trägheitsmoment und  $c$  die Direktionskraft ist. Ist nun aber  $\varphi$  so klein, daß der  $\sin$  durch den  $\text{arc}$  ersetzt werden kann so geht die obige Gleichung in die Gleichung unseres Paragraphen über: Fadenpendel (Hamel: El. M. Nr. 66, Hort: T. Schw. § 1 physisches Pendel (Hamel: El. M. Nr. 195, Hort: T. Schw. § 3, Bifilarpendel (Hort: T. Schw. § 4), Magnetnadel im Magnetfeld (Hort: T. Schw. § 4), Rollpendel (Hamel: El. M. Nr. 241).

3. Bei Torsionsschwingungen eines Drahtes, an dem ein Masse hängt, gilt unsere Differentialgleichung, falls das Trägheitsmoment des Drahtes vernachlässigt werden kann gegen das der angehängten Masse (Schäfer: Th. Ph. I, 532).

II. Bei elektrischen Schwingungen ist

$$E = \frac{1}{2} L Q^2 = \frac{1}{2} L J^2$$

die magnetische Energie, wobei  $L$  der Koeffizient der Selbstinduktion,  $Q$  die Elektrizitätsmenge und  $\dot{Q} = J$  die Stromstärke ist.

$$V = \frac{1}{2K} Q^2$$

ist die elektrische Energie, wobei  $K$  die Kapazität ist (Abraham: Th. d. El. § 40 und 63)

Die Differentialgleichung lautet demnach

$$L \ddot{Q} + \frac{1}{K} Q = 0$$

oder

$$L \ddot{J} + \frac{1}{K} J = 0$$

Die Formel (10) wird

$$\tau = 2\pi \sqrt{LK} \text{ (Thomson'sche Formel).}$$

Unsere Differentialgleichung hat wie alle homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten die Eigentümlichkeit, daß durch Differentiation eine neue Gleichung derselben Art

entsteht.  $ay + cy = 0$ , in der nur  $y$  durch  $y$  ersetzt ist. Es gilt also bei mechanischen Schwingungen dieselbe Differentialgleichung für die Elongation, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung. Bei elektrischen Schwingungen gilt dieselbe Differentialgleichung für die Elektrizitätsmenge  $Q$  und die Stromstärke  $J = Q$ .

## § 2. Grenzbedingungen.

Die Differentialgleichung des vorigen § tritt auch auf bei Problemen, wo sich zunächst eine partielle Differentialgleichung ergibt, die dann aber auf unsere totale Differentialgleichung zurückgeführt wird. Vgl. V § 1. Die unabhängige Variable ist dann meist nicht die Zeit  $t$ , sondern eine räumliche Koordinate  $x$ . Ich schreibe daher das Integral § 1 (9)

$$(1) \quad y = k \sin(x + \omega x).$$

An Stelle der Anfangsbedingungen für  $t = 0$  treten hier Grenzbedingungen für  $x = 0$  und  $x = 1$

Es sind dabei folgende 4 Grenzbedingungen wichtig:

$$(2) \quad \begin{cases} a) & y(0) = 0, & y(1) = 0, \\ b) & y(0) = 0, & y'(1) = 0, \\ c) & y'(0) = 0, & y(1) = 0, \\ d) & y'(0) = 0, & y'(1) = 0 \end{cases}$$

Diese Grenzbedingungen treten z. B. auf bei Longitudinalschwingungen von Stäben, je nachdem die Enden frei oder fest sind, bei Luftschwingungen in Röhren, je nachdem die Röhrenden offen oder geschlossen sind und bei Wärmebewegungen in Stäben, je nachdem die Stabenden auf der konstanten Temperatur 0 gehalten oder wärmeundurchlässig bedeckt sind. Die Bedingungen für die Integrationskonstanten  $k$  und  $\omega$  werden in den 4 Fällen.

$$(3) \quad \begin{cases} a) & k \sin \omega = 0, & k \sin(\omega + \omega) = 0, \\ b) & k \sin \omega = 0, & \omega k \cos(\omega + \omega) = 0, \\ c) & \omega k \cos \omega = 0, & k \sin(\omega + \omega) = 0, \\ d) & \omega k \cos \omega = 0, & \omega k \cos(\omega + \omega) = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind natürlich, wenn  $\omega$  nicht besondere Werte hat, nur durch  $k = 0$  zu erfüllen. Es sind nun zwei Fragen von Wichtigkeit

I Welchen Wert muß  $\omega$  (resp. die Konstanten unserer Differentialgleichung) haben, damit die Grenzbedingungen (2) erfüllbar sind?

II Wenn  $\omega$  diesen Wert nicht hat, welches sind dann unstetigen Funktionen, die unsere Differentialgleichungen und Grenzbedingungen (2) erfüllen?

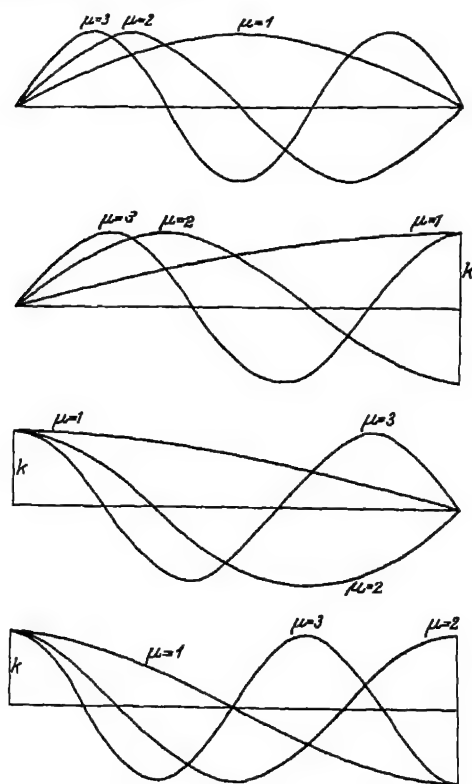


Abb. 3

I. Aus der Gl. (3) ergibt sich für  $\kappa$  und  $\omega$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{a) } \kappa = 0, & \omega = \mu\pi, \\ \text{b) } \kappa = 0, & \omega = (\mu - \frac{1}{2})\pi, \\ \text{c) } \kappa = \frac{\pi}{2}, & \omega = (\mu - \frac{1}{2})\pi, \quad (\mu = 1, 2, 3) \\ \text{d) } \kappa = \frac{\pi}{2}, & \omega = \mu\pi, \end{array} \right.$$

so daß wir folgende Lösungen erhalten (Abb. 3).

$$(5) \quad \begin{cases} \text{a)} & y = k \sin \mu \pi x, \\ \text{b)} & y = k \sin (\mu - \frac{1}{2}) \pi x, \\ \text{c)} & y = k \cos (\mu - \frac{1}{2}) \pi x, \\ \text{d)} & y = k \cos \mu \pi x. \end{cases} \quad (\mu = 1, 2, 3 \dots)$$

II. Um eine unstetige Funktion zu erhalten, die unsere Differentialgleichung und die Grenzbedingungen (2) erfüllt, bilde ich 2 Funktionen

$$\begin{aligned} y_1 &= k_1 \sin (\kappa_1 + \omega x), \\ y_2 &= k_2 \sin (\kappa_2 + \omega x), \end{aligned}$$

von denen  $y_1$  die untere und  $y_2$  die obere Grenzbedingung befriedigt.

$$(6) \quad \begin{cases} \text{a)} & \kappa_1 = 0, & \kappa_2 = -\omega, \\ \text{b)} & \kappa_1 = 0, & \kappa_2 = \frac{\pi}{2} - \omega, \\ \text{c)} & \kappa_1 = \frac{\pi}{2}, & \kappa_2 = -\omega, \\ \text{d)} & \kappa_1 = \frac{\pi}{2}, & \kappa_2 = \frac{\pi}{2} - \omega \end{cases}$$

Ich nehme nun im Intervall 0 bis 1 einen beliebigen Punkt  $\alpha$  an und bilde die unstetige Funktion  $y$  derart, daß im Intervall 0 bis  $\alpha$   $y = y_1$  und im Intervall  $\alpha$  bis 1  $y = y_2$  sein soll. Die Unstetigkeit liegt dann lediglich im Punkte  $\alpha$ . Da die Konstanten  $k_1$  und  $k_2$  noch ganz beliebig bleiben, kann ich die Art der Unstetigkeit im Punkte  $\alpha$  noch in ganz bestimmter Weise vorschreiben. Es soll dort etwa  $y$  selbst stetig sein

$$(7) \quad \begin{aligned} y_1(\alpha) &= y_2(\alpha), \\ k_1 \sin (\kappa_1 + \omega \alpha) &= k_2 \sin (\kappa_2 + \omega \alpha). \end{aligned}$$

Ich kann daher  $k_1$  und  $k_2$  durch eine Konstante  $k$  ausdrücken.

$$(8) \quad \begin{aligned} y_1 &= k \sin (\kappa_2 + \omega \alpha) \sin (\kappa_1 + \omega x), \\ y_2 &= k \sin (\kappa_1 + \omega \alpha) \sin (\kappa_2 + \omega x) \end{aligned}$$

Der Sprung, den die 1. Ableitung an der Stelle  $\alpha$  macht, ist

$$y'_1(\alpha) - y'_2(\alpha) = \omega k \sin (\kappa_2 - \kappa_1)$$

Ich kann nun  $k$  so bestimmen, daß dieser Sprung gerade 1 ist.

$$(9) \quad \begin{aligned} y'_1(\alpha) - y'_2(\alpha) &= 1, \\ k &= \frac{1}{\omega \sin (\kappa_2 - \kappa_1)}. \end{aligned}$$

Demnach ist nach Gl (8)

$$y_1 = \frac{\sin(\kappa_2 + \omega \alpha) \sin(\kappa_1 + \omega x)}{\omega \sin(\kappa_2 - \kappa_1)},$$

$$y_2 = \frac{\sin(\kappa_1 + \omega \alpha) \sin(\kappa_2 + \omega x)}{\omega \sin(\kappa_2 - \kappa_1)},$$

oder, wenn ich die Konstanten aus Gl. (6) einsetze:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } y_1 = \frac{\sin \omega (1 - \alpha) \sin \omega x}{\omega \sin \omega}, \quad y_2 = \frac{\sin \omega \alpha \sin \omega (1 - x)}{\omega \sin \omega} \\ \text{b) } y_1 = \frac{\cos \omega (1 - \alpha) \sin \omega x}{\omega \cos \omega}, \quad y_2 = \frac{\sin \omega \alpha \cos \omega (1 - x)}{\omega \cos \omega} \\ \text{c) } y_1 = \frac{\sin \omega (1 - \alpha) \cos \omega x}{\omega \cos \omega}, \quad y_2 = \frac{\cos \omega \alpha \sin \omega (1 - x)}{\omega \cos \omega} \\ \text{d) } y_1 = \frac{\cos \omega (1 - \alpha) \cos \omega x}{-\omega \sin \omega}, \quad y_2 = \frac{\cos \omega \alpha \cos \omega (1 - x)}{-\omega \sin \omega} \end{array} \right.$$

Diese Lösungen finden im § 16 Verwendung

Ist  $c = 0$ , so daß wir also die Differentialgleichung

$$(11) \quad y'' = 0$$

haben, so wird  $\omega = 0$  und die Gl (10 a), b), c) gehen in die folgenden über:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{a) } y_1 = (1 - \alpha)x, & y_2 = \alpha(1 - x), \\ \text{b) } y_1 = x, & y_2 = \alpha, \\ \text{c) } y_1 = 1 - \alpha, & y_2 = 1 - x, \end{array} \right.$$

Diese Lösungen finden im § 15 Verwendung

Im Falle d) werden  $y_1$  und  $y_2$  unendlich. Entwickle ich  $y_1$  und  $y_2$  nach Potenzen, so erhalte ich.

$$y_1 = \frac{\left(1 - \frac{(1 - \alpha)^2 \omega^2}{2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2 x^2}{2}\right) \left(1 + \frac{\omega^2}{6}\right)}{-\omega^2}$$

$$= -\frac{1}{\omega^2} + \left[\frac{1}{2}(1 - \alpha)^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}\right] + \dots,$$

$$y_2 = \frac{\left(1 - \frac{\alpha^2 \omega^2}{2}\right) \left(1 - \frac{(1 - x)^2 \omega^2}{2}\right) \left(1 + \frac{\omega^2}{6}\right)}{-\omega^2}$$

$$= -\frac{1}{\omega^2} + \left[\frac{1}{2}(1 - x)^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{6}\right] + \dots$$

Nenne ich die in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke  $\eta_1$  und  $\eta_2$ , so ist

$$(12d) \quad \eta_1 = \frac{1}{2}(1 - \alpha)^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}, \quad \eta_2 = \frac{1}{2}(1 - x)^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{6}.$$

An Stelle der Gl. (11) tritt hier die Gleichung

$$(11d) \quad \eta'' = 1$$

Außerdem erfüllt  $\eta$  die Bedingungen (2d), (7), (9)

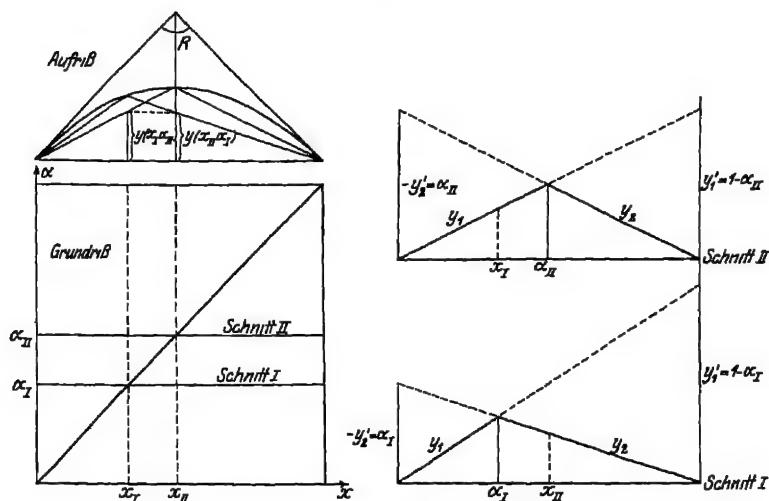


Abb. 4.

Deute ich  $x$  und  $\alpha$  als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene und  $y$  als räumliche Koordinate senkrecht dazu, so stellt (12a) 2 hyperbolische Paraboloiden dar. Von ihnen kommt nur der im Innern des Quadrates ( $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$ ) liegende Teil in Betracht. Über der Diagonale stoßen die beiden Paraboloiden längs einer Parabel in einer scharfen Kante zusammen und sind zu dieser Kante symmetrisch, da  $y$  in  $x$  und  $\alpha$  symmetrisch ist. Die Ränder des Quadrates bilden die beiden Scheitel erzeugenden der Paraboloiden. Es verschwindet dort  $y$  (Abb. 4). Deute ich (12b und c) in ähnlicher Weise, so erhalte ich 2 unter  $45^\circ$  ansteigende Ebenen, die durch die  $x$ - und  $\alpha$ -Achse hindurchgehen (Abb. 5). Deute ich schließlich (12d), so ergeben sich 2 Rotationsparaboloiden. Sie schneiden die  $x$ ,  $\alpha$ -Ebene in 2 Kreisen, deren Mittelpunkte die Ecken ( $x = 1$ ,  $\alpha = 0$ ) und ( $x = 0$ ,  $\alpha = 1$ )

des Quadrates sind und deren Radius  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$  ist. Über die diagonalen des Quadrates schneiden sich die Paraboloiden in einer Parabel, die aber im Gegensatz zu (a) ihre konvexe Seite unten kehrt (Abb. 6).

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß die Bedingung (2) Spezialfälle folgender allgemeiner Bedingungen

$$(13) \quad p_0 y(0) + q_0 y'(0) = c_0, \quad p_1 y(1) + q_1 y'(1) = c_1$$

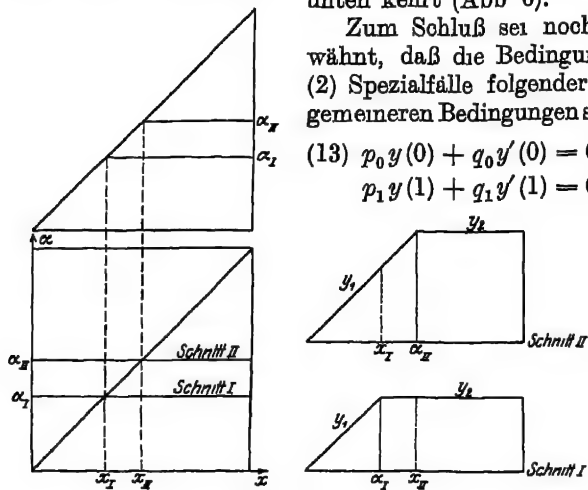


Abb. 5.

Diese Grenzbedingungen treten z. B. bei den Wärmebewegungen in einem Stabe auf, wenn die Stabenden Wärme ausstrahlen

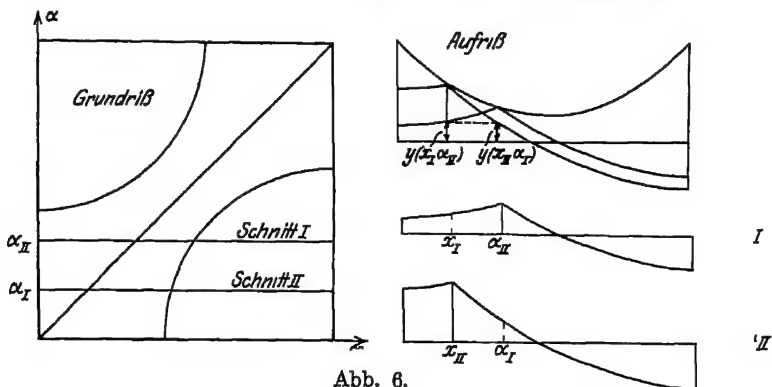


Abb. 6.

ergeben sich bei diesen Grenzbedingungen statt der Gl (6)  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  die transcendenten Gleichungen

$$(14) \quad \operatorname{tg} \kappa_1 = -\frac{q_0 \omega}{p_0}, \quad \operatorname{tg} (\kappa_2 + \omega) = -\frac{q_1 \omega}{p_1}.$$



§ 3.  $a\dot{y} - cy = 0$ .

An Stelle der trigonometrischen Funktionen des § 1 treten hier hyperbolische Funktionen  $a$  und  $c$  sollen wieder positiv sein. Es ist

- $$\begin{aligned} (1) \quad & y = K \operatorname{Cof} \omega t + L \operatorname{Sin} \omega t, \\ & y = \omega (K \operatorname{Sin} \omega t + L \operatorname{Cof} \omega t), \\ (2) \quad & \ddot{y} = \omega^2 y, \\ (3) \quad & a\omega^2 - c = 0, \\ (4) \quad & \omega = \sqrt{\frac{c}{a}}. \end{aligned}$$

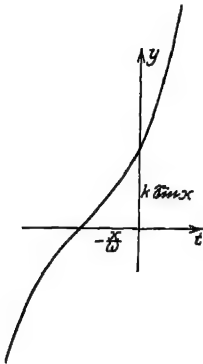


Abb. 7.

Soll zur Zeit  $t = 0$   $y = y_0$   
und  $\dot{y} = \dot{y}_0$  sein, so ist.

- $$\begin{aligned} (5) \quad & y_0 = K, \\ & \dot{y}_0 = \omega L, \\ (6) \quad & y = y_0 \operatorname{Cof} \omega t \\ & + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \operatorname{Sin} \omega t \end{aligned}$$

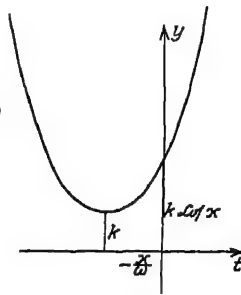


Abb. 8.

Ich kann nun wieder statt  $K$  und  $L$  neue Konstanten  $k$  und  $\kappa$  einführen. Ich muß dabei jedoch 2 Fälle unterscheiden.

- |   |  |
|---|--|
| $ K  <  L $<br>$(7) \quad \begin{aligned} K &= k \operatorname{Sin} \kappa \\ L &= k \operatorname{Cof} \kappa, \end{aligned}$<br>$(8) \quad \begin{aligned} k &= \sqrt{L^2 - K^2} \\ \operatorname{Tg} \kappa &= \frac{K}{L}. \end{aligned}$<br>$(9) \quad y = k \operatorname{Sin} (\kappa + \omega t)$ | $ K  >  L $<br>$(7') \quad \begin{aligned} K &= k \operatorname{Cof} \kappa \\ L &= k \operatorname{Sin} \kappa, \end{aligned}$<br>$(8') \quad \begin{aligned} k &= \sqrt{K^2 - L^2} \\ \operatorname{Tg} \kappa &= \frac{L}{K}, \end{aligned}$<br>$(9') \quad y = k \operatorname{Cof} (\kappa + \omega t)$ |
|---|--|

Bei den trigonometrischen Funktionen kann man es durch Änderung der Konstanten  $\kappa$  um  $\frac{\pi}{2}$  erreichen, daß an Stelle des  $\sin$  der  $\cos$  tritt. Bei den hyperbolischen Funktionen ist das nicht der Fall, die beiden Lösungen (9) und (9') sind wesentlich voneinander verschieden (Abb 7 und 8).

Für die geometrische Deutung der Lösungen (9) und (9') kann ich entsprechende Überlegungen anstellen wie in § 1. Es ist

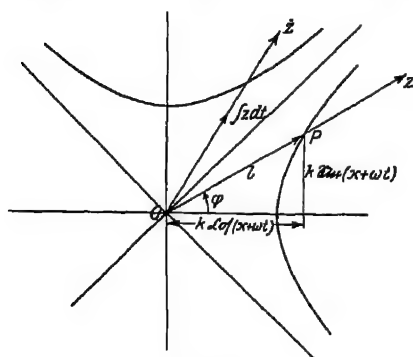
$$(11) \quad x = k \cos(\kappa + \omega t),$$

$$(12) \quad y = k \sin(\kappa + \omega t)$$

Deute ich auch hier  $x$  und  $y$  als horizontale und vertikale Koordinate eines Punktes  $P$ , so durchläuft, wenn  $t$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  wächst, der Punkt  $P$  die gleichseitige Hyperbel

$$(13) \quad x^2 - y^2 = k^2,$$

deren Parametergl (11) und (12) ist, und zwar für positive  $k$  den rechten Zweig, für negative  $k$  den linken Zweig (Abb. 9). Ich nenne den Vektor  $OP$  dann wieder mit  $z$  bezeichnen. Hierbei ist jedoch zu bemerken, daß  $k$  nicht etwa die Länge des Vektors ist und



$\kappa + \omega t$  nicht etwa der Winkel, den er mit der horizontalen Achse einschließt. Nenne ich diese beiden Größen  $l$  und  $\varphi$ , so ist vielmehr

$$l^2 = k^2 \cos 2(\kappa + \omega t),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{Tg}(\kappa + \omega t).$$

Differenziere ich die Gleichungen (11) und (12), so erhalte ich

$$(14) \quad x = \omega k \sin(\kappa + \omega t)$$

$$y = \omega k \cos(\kappa + \omega t)$$

Abb. 9

Es werden also horizontale und vertikale Komponente miteinander vertauscht und außerdem beide mit  $\omega$  multipliziert. Den Vektor, dessen Komponenten  $x$  und  $y$  sind, will ich mit  $z$  bezeichnen. Eine Differentiation von  $z$  entspricht dann also geometrisch eine Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten und eine Multiplikation mit  $\omega$ . Wächst  $t$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , so durchläuft  $z$  die gleichseitige Hyperbel

$$y^2 - x^2 = \omega^2 k^2,$$

und zwar für positive  $k$  den oberen Zweig, für negative  $k$  den unteren Zweig. Aus (1) folgt durch 2malige Differentiation

$$(15) \quad x = \omega^2 k \cos(\kappa + \omega t),$$

$$y = \omega^2 k \sin(\kappa + \omega t).$$

Durch eine 2malige Differentiation wird also  $z$  in seine Richtung nicht geändert, sondern nur mit  $\omega^2$  multipliziert. Schließ ich folgt aus (11) und (12) noch

$$(16) \quad \begin{aligned} \int x dt &= \frac{k}{\omega} \sin(\kappa + \omega t), \\ \int y dt &= \frac{k}{\omega} \cos(\kappa + \omega t). \end{aligned}$$

Einer Integration entspricht also eine Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten und eine Division durch  $\omega$ .

#### § 4. Die Grenzbedingungen im aperiodischen Fall.

Ich ersetze wieder in den Lösungen (9) des vorigen Paragraphen  $t$  durch  $x$ .

$$(1) \quad y = k \sin(\kappa + \omega x) \quad \text{oder} \quad (1') \quad y = k \cos(\kappa + \omega x)$$

und betrachte dieselben Grenzbedingungen wie im § 2

$$(2) \quad \begin{cases} \text{a)} & y(0) = 0, & y(1) = 0, \\ \text{b)} & y(0) = 0, & y'(1) = 0, \\ \text{c)} & y'(0) = 0, & y(1) = 0, \\ \text{d)} & y'(0) = 0, & y'(1) = 0. \end{cases}$$

Man erkennt, daß diese Grenzbedingungen für keinen Wert von  $\omega$  durch den Ansatz (1) oder (1') zu befriedigen sind. Ich muß vielmehr die Lösung  $y$  aus 2 Lösungen,  $y_1$  und  $y_2$ , zusammensetzen, von denen  $y_1$  die untere,  $y_2$  die obere Grenzbedingung befriedigt. Ich bezeichne die Gleichungen mit denselben Nummern wie die entsprechenden Gleichungen im § 2. Im Gegensatz zum § 2 muß ich hier für die 4 Unterfälle von (2) gesonderte Ansätze machen

$$\begin{aligned} \text{a)} & \quad y_1 = k_1 \sin(\kappa_1 + \omega x), & y_2 &= k_2 \sin(\kappa_2 + \omega x), \\ \text{b)} & \quad y_1 = k_1 \sin(\kappa_1 + \omega x), & y_2 &= k_2 \cos(\kappa_2 + \omega x), \\ \text{c)} & \quad y_1 = k_1 \cos(\kappa_1 + \omega x), & y_2 &= k_2 \sin(\kappa_2 + \omega x), \\ \text{d)} & \quad y_1 = k_1 \cos(\kappa_1 + \omega x), & y_2 &= k_2 \cos(\kappa_2 + \omega x), \end{aligned}$$

Aus den Grenzbedingungen (2) folgt in allen 4 Fällen

$$(6) \quad \kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 = -\omega,$$

so daß

$$\begin{aligned} \text{a)} & \quad y_1 = k_1 \sin \omega x, & y_2 &= k_2 \sin \omega (x - 1), \\ \text{b)} & \quad y_1 = k_1 \sin \omega x, & y_2 &= k_2 \cos \omega (x - 1), \\ \text{c)} & \quad y_1 = k_1 \cos \omega x, & y_2 &= k_2 \sin \omega (x - 1), \\ \text{d)} & \quad y_1 = k_1 \cos \omega x, & y_2 &= k_2 \cos \omega (x - 1). \end{aligned}$$

Genau wie im § 2 nehme ich nun einen Punkt  $\alpha$  an, an dem die beiden Lösungen zusammenstoßen sollen. Soll in diesen Punkten  $y$  stetig sein, so kann man, wie im § 1,  $k_1$  und  $k_2$  durch eine Konstante  $k$  ersetzen

$$(7) \begin{cases} a) y_1 = k \sin \omega (\alpha - 1) \sin \omega x, & y_2 = k \sin \omega \alpha \sin \omega (x - 1) \\ b) y_1 = k \cos \omega (\alpha - 1) \sin \omega x, & y_2 = k \sin \omega \alpha \cos \omega (x - 1) \\ c) y_1 = k \sin \omega (\alpha - 1) \cos \omega x, & y_2 = k \cos \omega \alpha \sin \omega (x - 1) \\ d) y_1 = k \cos \omega (\alpha - 1) \cos \omega x, & y_2 = k \cos \omega \alpha \cos \omega (x - 1) \end{cases}$$

Soll schließlich der Sprung, den  $y'$  an der Stelle  $\alpha$  macht gerade 1 sein, so ergeben sich als endgültige Lösungen.

$$(8) \begin{cases} a) y_1 = \frac{\sin \omega (1 - \alpha) \sin \omega x}{\omega \sin \omega}, & y_2 = \frac{\sin \omega \alpha \sin \omega (1 - x)}{\omega \sin \omega} \\ b) y_1 = \frac{\cos \omega (1 - \alpha) \sin \omega x}{\omega \cos \omega}, & y_2 = \frac{\sin \omega \alpha \cos \omega (1 - x)}{\omega \cos \omega} \\ c) y_1 = \frac{\sin \omega (1 - \alpha) \cos \omega x}{\omega \cos \omega}, & y_2 = \frac{\cos \omega \alpha \sin \omega (1 - x)}{\omega \cos \omega} \\ d) y_1 = \frac{\cos \omega (1 - \alpha) \cos \omega x}{-\omega \sin \omega}, & y_2 = \frac{\cos \omega \alpha \cos \omega (1 - x)}{-\omega \sin \omega} \end{cases}$$

Haben wir wieder statt der Bedingungen (2) die allgemeine Bedingung

$$(9) \quad p_0 y(0) + q_0 y'(0) = 0, \quad p_1 y(1) + q_1 y'(1) = 0,$$

so sind die Fälle a), b), c), d) in folgender Weise zu unterscheiden

$$\begin{aligned} a) \quad & \left| \frac{q_0 \omega}{p_0} \right| < 1, & \left| \frac{q_1 \omega}{p_1} \right| < 1, \\ b) \quad & \left| \frac{q_0 \omega}{p_0} \right| < 1, & \left| \frac{q_1 \omega}{p_1} \right| > 1, \\ c) \quad & \left| \frac{q_0 \omega}{p_0} \right| > 1, & \left| \frac{q_1 \omega}{p_1} \right| < 1, \\ d) \quad & \left| \frac{q_0 \omega}{p_0} \right| > 1, & \left| \frac{q_1 \omega}{p_1} \right| > 1. \end{aligned}$$

Es ergeben sich dann für  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  statt (6) die folgenden transzendenten Gleichungen

$$\S 5 \quad a \ddot{y} + b \dot{y} + c y = 0.$$

15

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{a)} & \Re \kappa_1 = -\frac{q_0 \omega}{p_0}, \quad \Re (\kappa_2 + \omega) = -\frac{q_1 \omega}{p_1}, \\ \text{b)} & \Re \kappa_1 = -\frac{q_0 \omega}{p_0}, \quad \Im (\kappa_2 + \omega) = -\frac{q_1 \omega}{p_1}, \\ \text{c)} & \Im \kappa_1 = -\frac{q_0 \omega}{p_0}, \quad \Re (\kappa_2 + \omega) = -\frac{q_1 \omega}{p_1}, \\ \text{d)} & \Im \kappa_1 = -\frac{q_0 \omega}{p_0}, \quad \Im (\kappa_2 + \omega) = -\frac{q_1 \omega}{p_1}. \end{array} \right.$$

Von den Gl. [8 a), b), c)] kann man genau so wie im § 2 zu dem Fall  $c = 0$  übergehen

$$\S 5. \quad a \ddot{y} + b \dot{y} + c y = 0.$$

Zu der Differentialgleichung des § 1 ist hier das Glied  $b \dot{y}$  hinzugetreten, das ich mit Rücksicht auf die Anwendungen als Dämpfungsglied bezeichnen will. Es ist hier am praktischsten, einen komplexen Ansatz zu machen

$$(1) \quad y = k e^{n t},$$

wobei  $n$  und  $k$  komplexe Zahlen sein sollen. Es ist dann

$$\dot{y} = n k e^{n t}$$

$$(2) \quad \ddot{y} = n^2 k e^{n t}.$$

Dadurch geht die Differentialgleichung über in

$$(3) \quad a n^2 + b n + c = 0,$$

$$(4) \quad n = \frac{1}{2a} (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$$

Es sind nun 3 Fälle zu unterscheiden:

$$I \quad b^2 < 4ac$$

$n$  ist dann komplex. Ich setze

$$n = \beta \pm i \omega$$

Dann ist

$$(4_I) \quad \beta = -\frac{b}{2a},$$

$$\omega = \frac{1}{2a} \sqrt{4ac - b^2}.$$

Es ist dann sowohl der reelle als auch der imaginäre Bestandteil von (1) ein Integral unserer Differentialgleichung.

Der imaginäre Bestandteil (Abb 10)

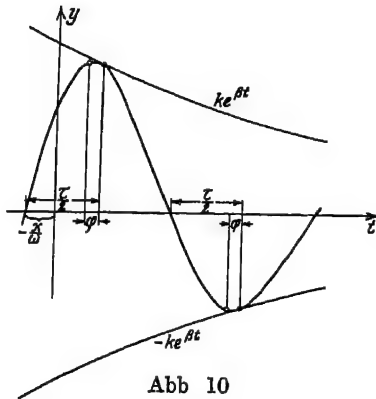


Abb 10

$$(1_I) \quad y = k e^{\beta t} \sin(\kappa + \omega t),$$

wobei an Stelle der komplexen Konstanten  $k$  von (1) die beiden reellen Konstanten  $k$  und  $\kappa$  treten sind. (1\_I) stellt eine gedämpfte Schwingung dar.

Ich betrachte  $y$  für die Zeiten  $t + \frac{\tau}{2}, t + \tau, t + \frac{3\tau}{2}, \dots$ ,

bei nach § 1 (10)  $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$  ist erhalte ich

$$y_1 = k e^{\beta t} \sin(\kappa + \omega t),$$

$$y_2 = k e^{\beta t + \beta \frac{\tau}{2}} \sin(\kappa + \omega t + \pi) = -e^{\beta \frac{\tau}{2}} y_1,$$

$$y_3 = k e^{\beta t + \beta \tau} \sin(\kappa + \omega t + 2\pi) = +e^{\beta \tau} y_1,$$

$$y_4 = k e^{\beta t + \frac{3\beta\tau}{2}} \sin(\kappa + \omega t + 3\pi) = -e^{\frac{3\beta\tau}{2}} y_1.$$

Es ist daher

$$(5) \quad \frac{|y_1|}{|y_2|} = \frac{|y_2|}{|y_3|} = \frac{|y_3|}{|y_4|} = \dots = e^{\beta \frac{\tau}{2}}$$

und

$$(6) \quad \frac{y_1}{y_3} = \frac{y_3}{y_5} = \dots = e^{\beta \tau}.$$

Für das Zeitintervall  $\frac{\tau}{2}$  ist also  $|y_r|$  die mittlere Proportion zu  $|y_{r-1}|$  und  $|y_{r+1}|$  und für das Zeitintervall  $\tau$  ist  $y_r$  die mittlere Proportionale zu  $y_{r-2}$  und  $y_{r+2}$ .  $e^{\beta \tau}$  (oder auch  $e^{\beta \frac{\tau}{2}}$ ) heißt das Dämpfungsverhältnis. Da nach (5) und (6)

$$\ln |y_r| - \ln |y_{r+1}| = \beta \frac{\tau}{2},$$

$$\ln y_r - \ln y_{r+2} = \beta \tau,$$

heißt  $\beta \tau$  (oder auch  $\beta \frac{\tau}{2}$ ) das logarithmische Dekrement.

Nach (1<sub>I</sub>) ist  $y = 0$ , wenn

$$(7) \quad t = \frac{1}{\omega}(-\kappa + \mu\pi). \quad (\mu = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

Für die Mitten der Nullstellen, d. h. für

$$(8) \quad t = \frac{1}{\omega} \left( -\kappa + \mu\pi + \frac{\pi}{2} \right)$$

ist

$$y = +ke^{\beta t} \quad \text{wenn} \quad \mu = 0, 2, 4 \dots$$

$$y = -ke^{\beta t} \quad \text{wenn} \quad \mu = 1, 3, 5 \dots$$

Die Kurve  $y$  berührt also an diesen Stellen die beiden Exponentiallinien  $ke^{\beta t}$  und  $-ke^{\beta t}$ . Diese Berührungsstellen sind aber nicht die extremen Werte der Funktion. Um diese aufzusuchen, bilde ich aus (1<sub>I</sub>)

$$(2_I) \quad y = ke^{\beta t} [\omega \cos(\kappa + \omega t) + \beta \sin(\kappa + \omega t)].$$

Es ist also  $y = 0$ , wenn

$$\operatorname{tg}(\kappa + \omega t) = -\frac{\omega}{\beta}.$$

Setze ich nun

$$\kappa + \omega t = \mu\pi + \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

so ist

$$(9) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\beta}{\omega}.$$

$y$  ist also Null, wenn

$$(10) \quad t = \frac{1}{\omega} \left( -\kappa + \mu\pi + \frac{\pi}{2} + \varphi \right). \quad (\mu = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

Vergleiche ich (8) mit (10), so erkenne ich, daß hier die extremen Werte nicht in der Mitte der Nullstellen liegen, sondern um  $\varphi$  von der Mitte entfernt. Ist  $b > 0$ , so ist nach (4<sub>I</sub>)  $\beta$  und nach (9)  $\varphi$  negativ. Die extremen Werte liegen also vor der Mitte

II  $b^2 > 4ac$ .

Es sind dann in (4) beide  $n$  reell und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist

$$(1_{II}) \quad y = k_1 e^{n_1 t} + k_2 e^{n_2 t}.$$

Es ist also  $y = 0$ , wenn

$$(7_{II}) \quad t = \frac{\ln \left( -\frac{k_2}{k_1} \right)}{n_1 - n_2}.$$

Aus (1<sub>II</sub>) bilde ich

$$(2_{II}) \quad \begin{aligned} y &= n_1 k_1 e^{n_1 t} + n_2 k_2 e^{n_2 t}, \\ \dot{y} &= n_1^2 k_1 e^{n_1 t} + n_2^2 k_2 e^{n_2 t}. \end{aligned}$$

Es ist also  $y = 0$ , wenn

$$(10_{II}) \quad \tau = \frac{\ln\left(-\frac{n_2 k_2}{n_1 k_1}\right)}{n_1 - n_2}$$

und  $\dot{y} = 0$ , wenn

$$(11) \quad t = \frac{\ln\left(-\frac{n_2^2 k_2}{n_1^2 k_1}\right)}{n_1 - n_2}$$

Es sind daher 4 Fälle zu unterscheiden

A  $n_1$  und  $n_2$  haben gleiches,  $k_1$  und  $k_2$  verschiedenes V. zeichen. Es sei  $|k_1| > |k_2|$ . Dann existiert nach (7), (10) und (

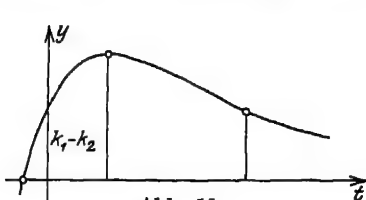


Abb. 11.

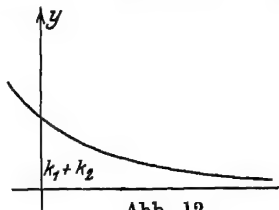


Abb. 12.

eine reelle Nullstelle, ein reelles Extremum und ein reeller Wendepunkt. Wir haben noch folgende Unterfälle.

- A.  $\alpha)$   $b > 0, k_1 > 0$  (Abb. 11),  $\gamma)$   $b < 0, k_1 > 0$ ,  
 $\beta)$   $b > 0, k_1 < 0$ ,  $\delta)$   $b < 0, k_1 < 0$

Die Figuren für die Fälle  $\beta, \gamma, \delta$  erhält man aus Abb. 11 durch Umklappen um die  $t$ -Achse, um die  $y$ -Achse resp. um beide Achsen.

B  $n_1$  und  $n_2$  sowie  $k_1$  und  $k_2$  haben gleiches Vorzeichen. Da existieren weder reelle Nullstellen, noch reelle Extreme, noch reelle Wendepunkte. Es sind dieselben Unterfälle zu unterscheiden wie bei A (Abb. 12).

C.  $n_1$  und  $n_2$  sowie  $k_1$  und  $k_2$  haben verschiedenes Vorzeichen (Abb. 7).

D.  $n_1$  und  $n_2$  haben verschiedenes,  $k_1$  und  $k_2$  haben gleiches Vorzeichen (Abb. 8).

III.  $b^2 = 4ac$ .

Die Gl. (3) hat dann eine Doppelwurzel

$$(4_{III}) \quad n = \beta = -\frac{b}{2a}$$



Die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung ist dann

$$(1_{III}) \quad y = (k_1 + k_2 t) e^{nt}.$$

Aus dieser Gleichung folgt nämlich

$$(2_{III}) \quad \begin{aligned} y &= (n k_1 + n k_2 t + k_2) e^{nt}, \\ \dot{y} &= (n^2 k_1 + n^2 k_2 t + 2 n k_2) e^{nt}. \end{aligned}$$

Setze ich diese Werte in unsere Differentialgleichung ein, so ergibt sich die folgende Gleichung:

$$(a n^2 + b n + c) k_1 + (a n^2 + b n + c) k_2 t + (2 a n + b) k_2 = 0.$$

Diese Gleichung ist für beliebige  $k_1$  und  $k_2$  erfüllt, wenn folgende beiden Gleichungen bestehen:

$$(3) \quad f(n) = a n^2 + b n + c = 0,$$

$$(3') \quad \frac{df(n)}{dn} = 2 a n + b = 0.$$

Das ist aber gerade die Bedingung dafür, daß  $n$  eine Doppelwurzel von (3) ist. Aus (1<sub>III</sub>) und (2<sub>III</sub>) folgt nun:

$$(7_{III}) \quad y = 0, \quad \text{wenn} \quad t = -\frac{k_1}{k_2},$$

$$(10_{III}) \quad y = 0, \quad \text{wenn} \quad t = -\frac{n k_1 + k_2}{n k_2}.$$

Nullstelle und Extremum sind also reell. Der Verlauf von  $y$  ist ähnlich wie im Falle IIA und wir haben die entsprechenden 4 Unterfälle wie dort.

Versucht man hier eine ähnliche geometrische Deutung wie im § 1, so erhält man den Vektor

$$z = k e^{\beta t} e^{i(n + \omega t)}$$

Diese dreht sich ebenfalls mit der konstanten Geschwindigkeit  $\omega$ , wird aber bei seiner Drehung vergrößert resp. verkleinert, je nachdem  $\beta$  positiv oder negativ ist. Sein Endpunkt beschreibt dabei eine logarithmische Spirale. Ein wesentlicher Unterschied gegen § 1

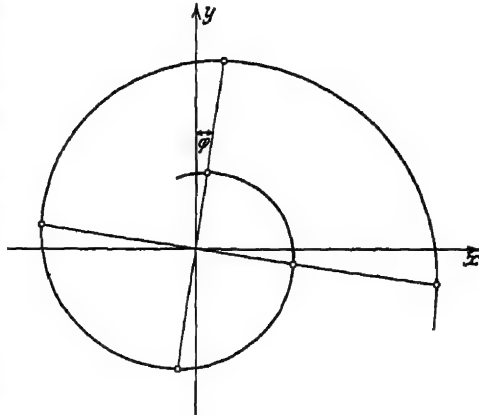


Abb. 13.

besteht z. B. darin, daß  $y$  nicht mehr sein Max. oder Min. erreicht, wenn  $z$  vertikal ist, sondern um den oben berechneten Winkel früher, wenn  $b$  resp.  $\beta$  neg. ist und um  $\varphi$  später, wenn  $b$  resp. pos. ist.  $y$  wird nämlich ein Extremum, wenn  $y = 0$ , wenn  $z$  horizontal ist.  $z$  und  $\dot{z}$  liegen aber bei der gedämpften Schwingung nicht mehr wie bei der ungedämpften um  $\frac{\pi}{2}$ , sondern um  $\frac{\pi}{2} \pm \varphi$  auseinander (Abb. 13).

### § 6. Die Energie.

Es sei  $E$  eine Funktion von  $\dot{y}$  und  $V$  eine Funktion von  $y$ . Ich entwickle beide Funktionen nach Potenzen und breche die Entwicklung nach den quadratischen Gliedern ab

$$(1) \quad E = E_0 + \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}}\right)_0 \dot{y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \dot{y}^2}\right)_0 \dot{y}^2,$$

$$(2) \quad V = V_0 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 y^2.$$

Nun bilde ich die Gleichung

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}}\right) + \frac{dV}{dy} = 0.$$

Setze ich (1) und (2) ein, so wird

$$(4) \quad \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \dot{y}^2}\right)_0 \ddot{y} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 y = 0.$$

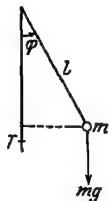


Abb. 14.

Das ist eine sogenannte inhomogene Differentialgleichung, wie wir sie nachher im § 12 betrachten werden.

Ist aber  $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 = 0$ , so hat (4) die Form der Gleichung § 1. Die Gl. (3) besagt dann dasselbe wie die Gleichung § 1 (18).

I. Bei mechanischen Schwingungen ist  $E$  die kinetische Energie,  $\frac{\partial E}{\partial \dot{y}}$  der Impuls,  $V$  das Potential, —

die Kraft und die Gl. (3) besagt, daß die Änderung des Impuls gleich der wirkenden Kraft ist. Bei dem Pendel der Abb. 14 z. B. die Energie

$$(5) \quad E = \frac{1}{2} m (l \dot{\varphi})^2.$$

Rechne ich die potentielle Energie von der tiefsten Lage  $T$  aus, so ist

$$(6) \quad V = mgl(1 - \cos\varphi)$$

Es ist daher

$$(7) \quad \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}\right) = m l^2,$$

$$(8) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 = 0,$$

$$(9) \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 = mgl$$

Nach § 1 (5) ist daher

$$(10) \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

II. Bei elektrischen Schwingungen ist  $E$  die magnetische Energie,  $\frac{\partial E}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial E}{\partial J} = LQ = LJ$  der Induktionsfluß (vgl. z. B. Orlich „Kapazität und Induktivität“ S. 123),  $V$  die elektrische Energie und  $-\frac{\partial V}{\partial Q} = -\frac{Q}{K}$  die elektromotorische Kraft. Die Gleichung (3) wird

$$(11) \quad \frac{d}{dt}(LJ) + \frac{Q}{K} = 0$$

Sie besagt, daß die Änderung des Induktionsflusses gleich der elektromotorischen Kraft ist

Ist nun außer der Kraft  $-\frac{dV}{dy}$  noch eine Kraft vorhanden, die kein Potential besitzt und die proportional der Geschwindigkeit  $y$  ist, so gilt statt (3) die Gleichung

$$(12) \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial y}\right) = -\frac{dV}{dy} - by.$$

Das letzte Glied stellt die Dämpfung dar. Als Dämpfung kommt für ein Pendel der Luftwiderstand in Betracht (Hamel El. M. Nr. 72), für eine Magnetnadel, die in einem geschlossenen Leiter schwingt, außerdem die Induktion (Hort: T. Schw. § 6).

Bei elektrischen Schwingungen tritt, wenn der Ohmsche Widerstand berücksichtigt wird, an Stelle von (11) die Gleichung

$$(13) \quad \frac{d}{dt}(LJ) + RJ + \frac{Q}{K} = 0$$

oder

$$(14) \quad L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{K}Q = 0$$

oder

$$(15) \quad L\ddot{J} + R\dot{J} + \frac{1}{K}J = 0.$$

### § 7. $ay''' + cy = 0$ .

Die Striche sollen Differentiationen nach  $x$  bedeuten  
allgemeine Integral ist

$$(1) \quad y = K \cos \omega x \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega x + L \cos \omega x \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \omega x \\ + M \sin \omega x \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega x + N \sin \omega x \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \omega x.$$

Daraus folgt namlich:

$$(2) \quad \begin{cases} y' = \omega [(L + M) \cos \omega x \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega x + (K + N) \cos \omega x \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \omega x \\ \quad + (N - K) \sin \omega x \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega x + (M - L) \sin \omega x \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \omega x] \\ y'' = 2\omega^2 [N \cos \omega x \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega x + M \cos \omega x \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \omega x \\ \quad - L \sin \omega x \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega x - K \sin \omega x \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \omega x], \\ y''' = 2\omega^3 [(M - L) \cos \omega x \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega x + (N - K) \cos \omega x \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \omega x \\ \quad - (N + K) \sin \omega x \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega x - (L + M) \sin \omega x \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \omega x] \\ y'''' = -4\omega^4 y. \end{cases}$$

Setze ich das in unsere Differentialgleichung ein, so ist

$$(3) \quad -4a\omega^4 y + cy = 0,$$

$$(4) \quad \omega = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \sqrt[4]{\frac{c}{a}}.$$

Die  $K, L, M, N$  berechnen sich nun aus den Grenzbedingungen. Diese können z. B. darin bestehen, daß an den Grenzen  $x = 0$  und  $x = 1$  je 2 der Größen  $y, y', y'', y'''$  vorgeschrieben sind. Das gibt im ganzen 36 Möglichkeiten.

Soll z. B.  $y(0) = y_0, y'(0) = y'_0, y''(1) = y''_1, y'''(1) = y'''_1$  sein, so ist:

$$K = y_0,$$

$$L = \frac{1}{\cos^2 \omega + \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f}^2 \omega} \left[ -(\sin \omega \cos \omega + \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \omega \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega) y_0 + \cos^2 \omega y'_0 \right. \\ \left. + (\cos \omega \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \omega - \sin \omega \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega) \frac{y''_1}{2\omega^2} - \cos \omega \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega \frac{y'''_1}{2\omega^3} \right],$$

$$M = \frac{1}{\cos^2 \omega + \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 \omega} \left[ + (\sin \omega \cos \omega + \mathfrak{S} \mathfrak{in} \omega \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega) y_0 + \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f}^2 \omega \frac{y'_0}{\omega} \right. \\ \left. + (\sin \omega \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega - \cos \omega \mathfrak{S} \mathfrak{in} \omega) \frac{y'_1}{2 \omega^2} \right. \\ \left. + \cos \omega \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega \frac{y''_1}{2 \omega^3} \right],$$

$$N = \frac{1}{\cos^2 \omega + \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f}^2 \omega} \left[ (\cos^2 \omega - \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f}^2 \omega) y_0 + (\sin \omega \cos \omega \right. \\ \left. - \mathfrak{S} \mathfrak{in} \omega \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega) \frac{y'_0}{\omega} + 2 \cos \omega \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega \frac{y'_1}{2 \omega^2} \right. \\ \left. - (\cos \omega \mathfrak{S} \mathfrak{in} \omega + \sin \omega \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega) \frac{y''_1}{2 \omega^3} \right].$$

Die obige Differentialgleichung tritt auf

1. bei einer Eisenbahnschwelle auf nachgiebiger Unterlage (Foppl. T M III, 260);

2. wenn eine schwimmende elastische Platte durch eine Einzellast belastet wird. Sie gilt dann aber nur in großer Entfernung von dieser Einzellast (Lorenz T Ph IV, 486),

3 bei rotierenden Trommeln (Lorenz T. Ph § 62),

4 bei zylindrischen Flüssigkeitsbehältern (Lorenz T Ph § 63)

### § 8. $ay''' - cy = 0$ .

Das allgemeine Integral ist

$$(1) \quad y = K \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega x + L \cos \omega x + M \mathfrak{S} \mathfrak{in} \omega x + N \sin \omega x$$

Daraus folgt

$$(2) \quad \begin{cases} y' = \omega (K \mathfrak{S} \mathfrak{in} \omega x - L \sin \omega x + M \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega x + N \cos \omega x), \\ y'' = \omega^2 (K \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega x - L \cos \omega x + M \mathfrak{S} \mathfrak{in} \omega x - N \sin \omega x), \\ y''' = \omega^3 (K \mathfrak{S} \mathfrak{in} \omega x + L \sin \omega x + M \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega x - N \cos \omega x), \\ y'''' = \omega^4 y. \end{cases}$$

Setze ich das in unsere Differentialgleichung ein, so ist

$$(3) \quad a \omega^4 y - cy = 0,$$

$$(4) \quad \omega = \sqrt[4]{\frac{c}{a}}.$$

Die  $K, L, M, N$  bestimmen sich aus den Grenzbedingungen. Sind diese in  $K, L, M, N$  homogen, so lassen sich die Grenzbedingungen nur für gewisse  $\omega$  erfüllen.  $\omega$  ist dann also nicht durch (4) als bestimmt gegeben anzusehen, sondern die Fragestellung lautet dann wie im § 2 I so: Welchen Wert muß  $\omega$  resp. die Konstanten

unserer Differentialgleichung haben, damit die Grenzbedingungen erfüllbar sind?

Sollen etwa an den Grenzen  $x = 0$  und  $x = 1$  je 2 der Großen  $y, y', y'', y'''$  verschwinden, so kombinieren sich also 2 der Gleichungen:

$$(5) \quad \begin{cases} a) & y(0) = K + L = 0, \\ b) & y'(0) = M + N = 0, \\ c) & y''(0) = K - L = 0, \\ d) & y'''(0) = M - N = 0, \end{cases}$$

mit 2 der Gleichungen

$$(5) \quad \begin{cases} e) & y(1) = K \cos \omega + L \cos \omega + M \sin \omega + N \sin \omega = 0, \\ f) & y'(1) = K \sin \omega - L \sin \omega + M \cos \omega + N \cos \omega = 0, \\ g) & y''(1) = K \cos \omega - L \cos \omega + M \sin \omega - N \sin \omega = 0, \\ h) & y'''(1) = K \sin \omega + L \sin \omega + M \cos \omega - N \cos \omega = 0 \end{cases}$$

Ich unterscheide nun 2 Fälle, je nachdem die beiden gegebenen der Gl. [5 a), b), c), d)] für 2 der Großen  $K, L, M, N$  Null ergeben oder nicht.

I. Im 1. Falle ergeben sich folgende Determinanten als Bedingungensgleichungen für  $\omega$ , wenn ich  $\mathfrak{S}$  statt  $\sin \omega$  usw. schreibe

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} \mathfrak{S} & s \\ \mathfrak{C} & c \end{array} \right| = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{T}g - tg = 0 \quad \text{im Falle} \quad \begin{array}{l} a c e f, \\ b d e h. \end{array} \\ \left| \begin{array}{cc} \mathfrak{S} & s \\ \mathfrak{S}, & -s \end{array} \right| = 0 \quad \text{oder} \quad \sin = 0 \quad \text{im Falle} \quad \begin{array}{l} a c e g, \\ b d h f \end{array} \\ \left| \begin{array}{cc} \mathfrak{S} & s \\ \mathfrak{C}, & -c \end{array} \right| = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{T}g + tg = 0 \quad \text{im Falle} \quad \begin{array}{l} a c e h, \\ b d g h \end{array} \\ \left| \begin{array}{cc} \mathfrak{C} & c \\ \mathfrak{S}, & -s \end{array} \right| = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{T}g + tg = 0 \quad \text{im Falle} \quad \begin{array}{l} a e f g, \\ b d e f \end{array} \\ \left| \begin{array}{cc} \mathfrak{C} & c \\ \mathfrak{C}, & -c \end{array} \right| = 0 \quad \text{oder} \quad \cos = 0 \quad \text{im Falle} \quad \begin{array}{l} a c f h, \\ b d e g \end{array} \\ \left| \begin{array}{cc} \mathfrak{S}, & -s \\ \mathfrak{C}, & -c \end{array} \right| = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{T}g - tg = 0 \quad \text{im Falle} \quad \begin{array}{l} a o g h, \\ b d f g \end{array} \end{array}$$

II. Im 2. Falle ergeben sich die folgenden Determinanten

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} \mathfrak{C} + c & \mathfrak{S} + s \\ \mathfrak{S} - s & \mathfrak{C} + c \end{array} \right| = 0 \quad \text{oder} \quad \cos \mathfrak{C} \mathfrak{C} + 1 = 0 \quad \text{im Falle} \quad \left\{ \begin{array}{l} a b g h, \\ c d e f, \\ a d f g, \\ b o g h \end{array} \right. \\ \left| \begin{array}{cc} \mathfrak{C} + c & \mathfrak{S} + s \\ \mathfrak{C} - c & \mathfrak{S} - s \end{array} \right| = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{T}g - tg = 0 \quad \text{im Falle} \quad \left\{ \begin{array}{l} a b g e, \\ c d e g, \\ a d h f, \\ b o h f. \end{array} \right. \end{array}$$

Tabelle der Gleichungen für diejenigen  $\omega$ , für die die Differentialgleichung  $\frac{d^4 y}{dx^4} - \omega^4 y = 0$  lösbar ist, unter den Grenzbedingungen.

Grenzbedingungen	$y(1) = y'(1) = 0$	$y(1) = y''(1) = 0$	$y(1) = y'''(1) = 0$	$y'(1) = y''(1) = 0$	$y'(1) = y'''(1) = 0$	$y''(1) = y'''(1) = 0$
$y(0) = y'(0) = 0$	$\cos \omega \cos \omega - 1 = 0$	$\cos \omega \cos \omega = 0$	$\sin \omega = 0$	$\sin \omega = 0$	$\cos \omega + \sin \omega = 0$	$\cos \omega \cos \omega + 1 = 0$
$y(0) = y''(0) = 0$	$\cos \omega - \sin \omega = 0$	$\sin \omega = 0$	$\cos \omega + \sin \omega = 0$	$\cos \omega + \sin \omega = 0$	$\cos \omega = 0$	$\cos \omega - \sin \omega = 0$
$y(0) = y'''(0) = 0$	$\sin \omega = 0$	$\cos \omega + \sin \omega = 0$	$\cos \omega \cos \omega - 1 = 0$	$\cos \omega \cos \omega + 1 = 0$	$\cos \omega \cos \omega = 0$	$\sin \omega = 0$
$y'(0) = y''(0) = 0$	$\sin \omega = 0$	$\cos \omega + \sin \omega = 0$	$\cos \omega \cos \omega + 1 = 0$	$\cos \omega \cos \omega - 1 = 0$	$\cos \omega - \sin \omega = 0$	$\sin \omega = 0$
$y'(0) = y'''(0) = 0$	$\cos \omega + \sin \omega = 0$	$\cos \omega = 0$	$\cos \omega - \sin \omega = 0$	$\cos \omega - \sin \omega = 0$	$\sin \omega = 0$	$\cos \omega + \sin \omega = 0$
$y''(0) = y'''(0) = 0$	$\cos \omega \cos \omega + 1 = 0$	$\cos \omega - \sin \omega = 0$	$\sin \omega = 0$	$\sin \omega = 0$	$\cos \omega - \sin \omega = 0$	$\cos \omega \cos \omega - 1 = 0$

Tabelle der zu den gefundenen  $\omega$  gehörenden Integrale.

Grenzbedingungen	$y(1) = y'(1) = 0$ oder $y(1) = y''(1) = 0$	$y'(1) = y''(1) = 0$ oder $y'(1) = y'''(1) = 0$	$y''(1) = y'''(1) = 0$ oder $y''(1) = y''''(1) = 0$
$y(0) = y'(0) = 0$	$y = C_2 S_2(x) - S_2 C_2(x)$	$y = S_1 S_2(x) + C_2 C_2(x)$	$y = C_1 S_2(x) - S_1 C_2(x)$
$y(0) = y''(0) = 0$	$y = \sin \omega \sin \omega - \sin \omega \sin \omega$	$y = \cos \omega \sin \omega - \cos \omega \sin \omega$	$y = \sin \omega \sin \omega + \sin \omega \sin \omega$
$y(0) = y'''(0) = 0$	$y = C_2 S_1(x) - S_1 C_2(x)$	$y = S_1 S_1(x) + C_1 C_2(x)$	$y = C_1 S_1(x) - S_1 C_2(x)$
$y'(0) = y''(0) = 0$	$y = C_1 S_2(x) - S_2 C_1(x)$	$y = S_2 S_2(x) + C_2 C_1(x)$	$y = C_2 S_2(x) - S_2 C_1(x)$
$y'(0) = y'''(0) = 0$	$y = \cos \omega \cos \omega - \cos \omega \cos \omega$	$y = \sin \omega \cos \omega + \sin \omega \cos \omega$	$y = \cos \omega \cos \omega + \cos \omega \cos \omega$
$y''(0) = y'''(0) = 0$	$y = C_1 S_1(x) - S_1 C_1(x)$	$y = S_2 S_1(x) + C_1 C_1(x)$	$y = C_2 S_1(x) - S_2 C_1(x)$

Es bedeutet dabei

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \sin \omega x + \sin \omega x, & S_1 &= \sin \omega + \sin \omega, \\ S_2(x) &= \sin \omega x - \sin \omega x, & S_2 &= \sin \omega - \sin \omega, \\ C_1(x) &= \cos \omega x + \cos \omega x, & C_1 &= \cos \omega + \cos \omega, \\ C_2(x) &= \cos \omega x - \cos \omega x, & C_2 &= \cos \omega - \cos \omega. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{array}{cc} \mathfrak{C} + c & \mathfrak{S} + s \\ \mathfrak{S} + s & \mathfrak{C} - c \end{array} \right| = 0 & \text{ oder } \sin = 0 \quad \text{im Falle} \cdot \left\{ \begin{array}{l} a b g f, \\ c d e h, \\ a d h g, \\ b c f e. \end{array} \right. \\
 \left| \begin{array}{cc} \mathfrak{S} - s & \mathfrak{C} + c \\ \mathfrak{C} - c & \mathfrak{S} - s \end{array} \right| = 0 & \text{ oder } \sin = 0 \quad \text{im Falle} \cdot \left\{ \begin{array}{l} a b h e, \\ c d f g, \\ a d e f, \\ b c g h \end{array} \right. \\
 \left| \begin{array}{cc} \mathfrak{S} - s & \mathfrak{C} + c \\ \mathfrak{C} + s & \mathfrak{C} - c \end{array} \right| = 0 & \text{ oder } \mathfrak{T}g + tg = 0 \quad \text{im Falle} \cdot \left\{ \begin{array}{l} a b h f, \\ c d f h, \\ a d e g, \\ b c g e. \end{array} \right. \\
 \left| \begin{array}{cc} \mathfrak{C} - c & \mathfrak{S} - s \\ \mathfrak{S} + s & \mathfrak{C} - c \end{array} \right| = 0 & \text{ oder } 1 - \cos \mathfrak{C} \mathfrak{D} = 0 \quad \text{im Falle} \cdot \left\{ \begin{array}{l} a b e f, \\ c d g h, \\ a d e h, \\ b c f g. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Die Resultate sind in der Tabelle zusammengestellt. Werden nun die  $\omega$  den Gleichungen entsprechend gewählt, so können die  $K, L, M, N$  aus den 2 gegebenen der Gl. [5a), b), c), d)] und aus einer von den 2 gegebenen der Gl. [5e), f), g), h)] bis auf einen konstanten Faktor berechnet werden. Die Resultate sind ebenfalls in der Tabelle zusammengestellt.

Unsere Differentialgleichung tritt z. B. auf bei den Biegungsschwingungen von Stäben. Vgl. V § 3 (I). Es ergibt sich da zunächst eine partielle Differentialgleichung, die aber auf unsere zurückgeführt wird. Die Grenzbedingungen haben dabei folgende Bedeutung:

1. Freies Stabende . . . . .  $y'' = 0, \quad y''' = 0$
2. Eingeklemmtes Stabende . . . . .  $y = 0, \quad y' = 0.$
3. Drehbar gelagertes Stabende . . . . .  $y = 0, \quad y'' = 0$

### § 9. $ay''' + by'' + cy = 0.$

Diese Gleichung hat Ähnlichkeit mit der des § 5. Die Gleichungen von § 7 und 8 sind in ihr als Spezialfälle enthalten. Es ist

$$(1) \quad y = k e^{n x},$$

$$(2) \quad \begin{cases} y'' = n^2 k e^{n x}, \\ y''' = n^4 k e^{n x}, \end{cases}$$

$$(3) \quad a n^4 + b n^2 + c = 0,$$

$$(4) \quad n^2 = \frac{1}{2a} (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$$



$$ay'' + by' + cy = 0.$$

27

Wie im § 5 sind nun wieder 3 Fälle zu unterscheiden.

I.  $b^2 < 4ac$ .

$n^2$  ist dann komplex. Ich setze:

$$n = \pm \omega_1 \pm i \omega_2.$$

Dann ist:

$$(5) \quad \begin{cases} \omega_1^2 - \omega_2^2 = -\frac{b}{2a}, \\ 2\omega_1\omega_2 = \frac{1}{2a} \sqrt{4ac - b^2}. \end{cases}$$

Das Integral kann ich dann in folgender Form schreiben

$$(1) \quad y = K \mathfrak{C} \mathfrak{O} \omega_1 x \cos \omega_2 x + L \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \omega_1 x \cos \omega_2 x \\ + M \mathfrak{C} \mathfrak{O} \omega_1 x \sin \omega_2 x + N \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \omega_1 x \sin \omega_2 x.$$

Ist  $b = 0$ , so ist  $\omega_1 = \omega_2$  und wir haben den Fall des § 7

II.  $b^2 > 4ac$ .

$n^2$  ist dann reell. Man muß folgende Unterfälle unterscheiden

IIA.  $a$  und  $c$  haben ungleiches Vorzeichen: Es ist in (4) ein  $n^2$  positiv ein  $n^2$  negativ.

IIB.  $a$  und  $c$  haben gleiches,  $b$  hat das entgegengesetzte Vorzeichen. Es sind in (4) beide  $n^2$  positiv.

IIC.  $a$ ,  $b$  und  $c$  haben gleiches Zeichen: Es sind in (4) beide  $n^2$  negativ.

Das allgemeine Integral lautet nun in den 3 Fällen

$$(1_{IIA}) \quad y = K \mathfrak{C} \mathfrak{O} \omega_1 x + L \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \omega_1 x + M \cos \omega_2 x + N \sin \omega_2 x,$$

$$(1_{IIB}) \quad y = K \mathfrak{C} \mathfrak{O} \omega_1 x + L \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \omega_1 x + M \mathfrak{C} \mathfrak{O} \omega_2 x + N \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \omega_2 x,$$

$$(1_{IIC}) \quad y = K \cos \omega_1 x + L \sin \omega_1 x + M \cos \omega_2 x + N \sin \omega_2 x.$$

Die weiteren Rechnungen sind ähnlich wie im vorigen Paragraph. Sind z. B. die Grenzbedingungen

$$y(0) = y'(0) = 0$$

$$y(1) = y'(1) = 0,$$

so ergeben sich für  $\omega_1$  und  $\omega_2$  folgende Gleichungen:

$$(6_A) \quad \begin{vmatrix} \mathfrak{C} \mathfrak{O} \omega_1 - \cos \omega_2 & \frac{1}{\omega_1} \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \omega_1 - \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 \\ \omega_1 \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \omega_1 + \omega_2 \sin \omega_2 & \mathfrak{C} \mathfrak{O} \omega_1 - \cos \omega_2 \end{vmatrix} = \\ 2\omega_1\omega_2(\mathfrak{C} \mathfrak{O} \omega_1 \cos \omega_2 - 1) + (\omega_1^2 - \omega_2^2) \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \omega_1 \sin \omega_2 = 0,$$

$$\begin{aligned}
 (6_B) \quad & \left| \begin{array}{cc} \cos \omega_1 - \cos \omega_2 & \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 - \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 \\ \omega_1 \sin \omega_1 - \omega_2 \sin \omega_2 & \cos \omega_1 - \cos \omega_2 \end{array} \right| = \\
 & 2 \omega_1 \omega_2 (\cos \omega_1 \cos \omega_2 - 1) - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \sin \omega_1 \sin \omega_2 = 0, \\
 (6_C) \quad & \left| \begin{array}{cc} \cos \omega_1 - \cos \omega_2 & \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 - \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 \\ -\omega_1 \sin \omega_1 + \omega_2 \sin \omega_2 & \cos \omega_1 - \cos \omega_2 \end{array} \right| = \\
 & 2 \omega_1 \omega_2 (1 - \cos \omega_1 \cos \omega_2) - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \sin \omega_1 \sin \omega_2 = 0.
 \end{aligned}$$

Ist  $b = 0$ , so ist im Falle A:  $\omega_1 = \omega_2$ . Die Gleichung (6<sub>A</sub>) geht dann in die Gleichung

$$1 - \cos \omega \cos \omega = 0$$

von § 8 über

$$III \quad b^2 = 4ac$$

Die Gleichung (3) hat dann die beiden Doppelwurzeln

$$(4_{III}) \quad n = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}.$$

Man muß folgende Unterfälle unterscheiden:

III A.  $a$  und  $b$  haben gleiches Vorzeichen

$$(1_{III A}) \quad y = (K + Lx) \cos \omega x + (M + Nx) \sin \omega x, \quad \omega = \sqrt{\frac{b}{2a}}$$

III B.  $a$  und  $b$  haben ungleiches Vorzeichen

$$(1_{III B}) \quad y = (K + Lx) \cos \omega x + (M + Nx) \sin \omega x, \quad \omega = \sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

$$\S 10. \quad \sum_{i=0}^p a_i \frac{d^i y}{dx^i} = 0.$$

Die bisher betrachteten Gleichungen sind Spezialfälle der obigen.

Es soll in ihr unter  $\frac{d^0 y}{dx^0}$  die Größe  $y$  selbst verstanden sein. Ein Integral ist

$$(1) \quad y = k e^{nx},$$

$$(2) \quad \frac{d^i y}{dx^i} = n^i k e^{nx}$$

Setze ich das in unsere Differentialgleichung ein, so ist:

$$k e^{nx} \sum_{i=0}^p a_i n^i = 0.$$

$$\S 10. \sum_{i=0}^p a_i \frac{d^i y}{dx^i} = 0.$$

Setze ich nun

$$(3) \quad \sum_{i=0}^p a_i n^i = f(n),$$

so ist also (1) ein Integral unserer Differentialgleichung, wenn  $n$  eine Lösung der Gleichung

$$(4) \quad f(n) = 0$$

ist. Das ist eine Gleichung  $p^{\text{ten}}$  Grades, die also  $p$ -Losungen hat. Das allgemeine Integral ist also

$$(5) \quad y = \sum_{\mu=1}^p k_{\mu} e^{n_{\mu} x}$$

Sind unter den Wurzeln von (4) 2 konjugiert komplex, so setze ich

$$\begin{aligned} n_{\mu} &= \beta_{\mu} + i \omega_{\mu}, \\ k_{\mu} &= |k_{\mu}| e^{i \kappa_{\mu}} \end{aligned}$$

und bilde den reellen oder imaginären Bestandteil der Partikularlösung  $k_{\mu} e^{n_{\mu} x}$ . Der imaginäre Bestandteil ist

$$|k_{\mu}| e^{\beta_{\mu} x} \sin(\kappa_{\mu} + \omega_{\mu} x).$$

Diese Partikularlösung mit den beiden willkürlichen Konstanten  $|k_{\mu}|$  und  $\kappa_{\mu}$  ersetzt die beiden Partikularlösungen, die zu den konjugierten komplexen  $n_{\mu}$  gehören

Hat (4) eine  $(r+1)$ -fache Wurzel, d. h. werden in (5)  $(r+1)$  Größen  $n_{\mu}$  einander gleich, so ziehen sich die zugehörigen Konstanten  $k_{\mu}$  in eine einzige Konstante zusammen. Es gehen also  $r$ -Konstanten verloren. Um die nötige Anzahl von Konstanten zu erhalten, muß ich statt (1) folgenden allgemeineren Ansatz machen.

$$(6) \quad y = k x^{\mu} e^{n x}$$

Nun gilt bekanntlich die Formel

$$(7) \quad \frac{d^i f(x) g(x)}{dx^i} = \sum_{\kappa=0}^i \binom{i}{\kappa} \frac{d^{\kappa} f(x)}{dx^{\kappa}} \frac{d^{i-\kappa} g(x)}{dx^{i-\kappa}}$$

Setze ich hierin

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\mu}, \\ g(x) &= e^{n x}, \end{aligned}$$

so ist

$$(8) \quad \frac{d^i y}{dx^i} = k e^{n x} \sum_{\kappa=0}^i \binom{i}{\kappa} \frac{\mu!}{(\mu-\kappa)!} n^{i-\kappa} x^{\mu-\kappa}.$$

B7:5  
11. 11. 1911

55/11

5362

Setze ich diesen Ausdruck in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich, wenn ich gleich umordne

$$(9) \quad \sum_{\kappa=0}^{\mu} \left( \sum_{i=\kappa}^p a_i \frac{i!}{(i-\kappa)!} n^{i-\kappa} \right) \binom{\mu}{\kappa} x^{\mu-\kappa} = 0$$

Nun ist nach (3)

$$f(n) = \sum_{i=0}^p a_i n^i.$$

Daraus folgt

$$(10) \quad \frac{d^{\kappa} f}{dn^{\kappa}} = \sum_{i=\kappa}^p a_i \frac{i!}{(i-\kappa)!} n^{i-\kappa}.$$

Setze ich dies in (9) ein, so ist.

$$(11) \quad \sum_{\kappa=0}^{\mu} \frac{d^{\kappa} f}{dn^{\kappa}} \binom{\mu}{\kappa} x^{\mu-\kappa} = 0.$$

Diese Gleichung ist erfüllt für  $\mu = 0, 1, 2 \dots r$ , wenn

$$(12) \quad \frac{d^{\kappa} f}{dn^{\kappa}} = 0 \quad \text{für} \quad \kappa = 0 \dots r.$$

Diese Gleichung besagt, daß  $n$  eine  $(r+1)$ -fache Wurzel der Gleichung

$$(4) \quad f(n) = 0$$

ist. Für jede Wurzel  $n$  der Gl. (4) ergibt sich also folgende Lösung

$$e^{n x} \sum_{\mu=0}^r k_{\mu} x^{\mu},$$

wobei  $r+1$  die Multiplizität der Wurzel ist. Die Lösung hat dann  $r+1$  willkürliche Konstante.

### § 11. $b y' + c y = C$ .

Obige Differentialgleichung ist inhomogen. Bei solchen Gleichungen setzt man das Integral zusammen aus einem partikularen Integral und dem allgemeinen Integral der homogenen Gleichungen.

$$(1) \quad b y' + c y = 0$$

Das partikuläre Integral ist hier einfach die Konstante

$$(2) \quad y = \frac{C}{c}.$$

Das allgemeine Integral der homogenen Gleichung ist:

$$(3) \quad y = k e^{nt} \quad \left( n = -\frac{c}{b} \right).$$

Das allgemeine Integral ist also.

$$(4) \quad y = \frac{C}{c} + k e^{-\frac{c}{b}t}.$$

Soll z. B. zur Zeit  $t = 0$ ,  $y = y_0$  sein, so ist nach (4)  $k = y_0 - \frac{C}{c}$  und daher.

$$(5) \quad y = \frac{C}{c} + \left( y_0 - \frac{C}{c} \right) e^{-\frac{c}{b}t}.$$

Für den Schließungsextrastrom gilt z. B. die Gleichung:

$$L \frac{dJ}{dt} + RJ = E,$$

und es ist  $y_0 = 0$ . Daher ist nach (5)

$$J = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Für den Öffnungsextrastrom ist.

$$L \frac{dJ}{dt} + RJ = 0$$

und  $y_0 = \frac{E}{R}$ . Daher ist

$$J = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

## § 12. $a\ddot{y} + cy = C$ .

Das partikuläre Integral ist wie im § 11 die Konstante  $\frac{C}{c}$ , während sich das allgemeine Integral aus § 1 ergibt. Es ist also

$$(1) \quad y = \frac{C}{c} + k \sin(\kappa + \omega t).$$

Differentialgleichungen der obigen Form erhält man, wenn man bei mechanischen Schwingungen die Reibung nicht proportional der Geschwindigkeit ansetzt, sondern konstant annimmt. Sie ist dann so anzunehmen, daß sie stets der Geschwindigkeit entgegenwirkt, also positiv, wenn  $y$  negativ, und negativ, wenn  $y$  positiv.

$$(2) \quad a\ddot{y} + cy = +C \text{ für neg. } y,$$

$$(3) \quad a\ddot{y} + cy = -C \text{ für pos. } y.$$

Die Lösungen sind dann

$$(4) \quad y = +\frac{C}{c} + k \sin(\kappa + \omega t) \text{ für neg. } y,$$

$$(5) \quad y = -\frac{C}{c} + k \sin(\kappa + \omega t) \text{ für pos. } y$$

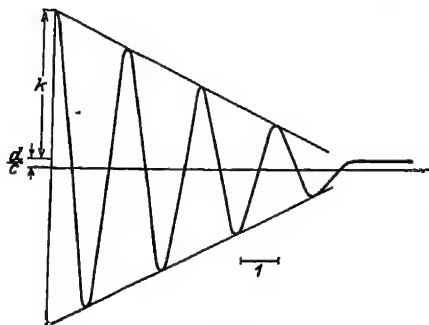


Abb. 15

Die Konstanten  $k$  sind nun so zu bestimmen, daß an den Stellen

$$(6) \quad t = \frac{1}{\omega} \left( \frac{2\mu + 1}{2} \pi - \kappa \right)$$

$$(\mu = 0, 1, 2 \dots),$$

wo die Lösungen (4) und (5) ineinander übergehen, dieser Übergang stetig erfolgt. Es muß zu dem Zweck an den

Stellen (6)  $k$  um  $2\frac{C}{c}$  abneh-

men, und zwar so oft, bis  $k < \frac{C}{c}$ . Die Schwingung bleibt dann unterwegs stehen. In der Abb. 15 ist

$$\kappa = \frac{\pi}{2} \left( \frac{C}{c} = \frac{1}{4} \text{ und } k \text{ beginnt bei } 4 \right)$$

### § 13. $b\dot{y} + cy = C \sin(\gamma + \omega t)$ .

In dieser Differentialgleichung ist das Glied, das die Gleichung inhomogen macht, nicht wie im vorigen Paragraph konstant, sondern eine sin-Funktion. Es ist praktisch, dieses Glied in komplexer Form anzunehmen. Ich schreibe also die Differentialgleichung folgendermaßen

$$(1) \quad b\dot{y} + cy = C e^{\gamma} e^{i\omega t};$$

$y$  setzt sich nun wieder zusammen aus einem partikularen Integral  $y_1$  von (1) und dem allgemeinen Integral  $y_2$  der homogenen Gleichung. Es ist

$$(2) \quad y_1 = r e^{i\omega t},$$

wobei  $r$  noch geeignet zu bestimmen ist. Setze ich (2) in (1) ein, so ist:

$$(3) \quad (bi\omega + c) r e^{i\omega t} = C e^{\gamma} e^{i\omega t}$$

oder

$$(4) \quad r = \frac{C e^{i\gamma}}{b i \omega + c} = C e^{i\gamma} \frac{c - i b \omega}{c^2 + b^2 \omega^2},$$

$r$  ist also komplex. Ich setze:

$$(5) \quad \begin{aligned} r &= |r| e^{i\varrho}, \\ |r| &= C \sqrt{c^2 + b^2 \omega^2}, \\ \varrho &= \gamma + \varphi, \end{aligned}$$

$$(6) \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{b \omega}{c}.$$

Das Integral  $y_1$  kann ich also schreiben, wenn ich nun wieder zu reellen Größen übergehe:

$$(7) \quad y_1 = |r| \sin(\varrho + \omega t).$$

Hierzu tritt nun noch das Integral  $y_2$  der homogenen Gleichung  $by + cy = 0$ . Es ist

$$(8) \quad \begin{aligned} y_2 &= k e^{nt}, \\ bn + c &= 0, \end{aligned}$$

$$(9) \quad n = -\frac{c}{b},$$

so daß das allgemeine Integral lautet:

$$(10) \quad y = |r| \sin(\varrho + \omega t) + k e^{nt}.$$

Die Integrationskonstante  $k$  sei z. B. dadurch bestimmt, daß für  $t = 0$   $y = y_0$  sein soll. Dann ist:

$$(11) \quad k = y_0 - |r| \sin \varrho.$$

In Abb. 16 ist speziell  $\varrho = 0$  angenommen.

Die Gleichung dieses Paragraphen ist die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung,  $C \sin(\gamma + \omega t)$  ist die erregende Schwingung,  $|r| \sin(\varrho + \omega t)$  die erzwungene Schwingung. Hat z. B. eine Leitung den Widerstand  $R$  und die Selbstinduktion  $L$  und liegt an den Enden die Klemmspannung  $E \sin(\gamma + \omega t)$ , so gilt für die Stromstärke  $J$  die Gleichung

$$(12) \quad LJ + RJ = E \sin(\gamma + \omega t).$$

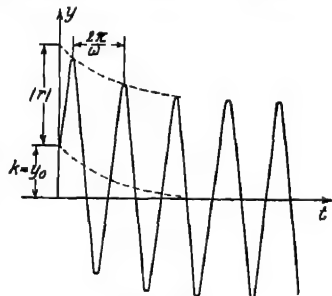


Abb. 16.

§ 14.  $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = C \sin(\gamma + \omega t)$ .

Zu der Differentialgleichung des vorigen Paragraphen ist hier noch das Beschleunigungsglied  $a\ddot{y}$  hinzutreten. Ich gehe wieder zu komplexen Größen über

$$(1) \quad a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = Ce^{i\gamma} e^{i\omega t}$$

Das allgemeine Integral setzt sich nun wieder zusammen aus einem partikularen Integral  $y_1$  und dem allgemeinen Integral der homogenen Gleichung, das sich aus § 5 ergibt. Ich nehme  $y_1$  in folgender Form an.

$$(2) \quad y_1 = r e^{i\omega t}.$$

Setze ich das in unsere Differentialgleichung ein, so ist

$$(3) \quad (-a\omega^2 + bi\omega + c) r e^{i\omega t} = Ce^{i\gamma} e^{i\omega t}$$

oder

$$(4) \quad Ce^{i\gamma} = (c - a\omega^2 + ib\omega) r.$$

Es mußte nun untersucht werden, für welchen Wert von  $\omega$  bei gegebenem  $C$  die Amplitude  $r$  der erzwungenen Schwingung am größten wird. Es ist jedoch bequemer, hier den umgekehrten Weg einzuschlagen und die extremen Werte von  $C$  bei gegebenem  $r$  festzustellen. Ich bezeichne nach § 10 (3) die Klammer mit  $f(i\omega)$  und differenziere das Quadrat des absoluten Betrages der Klammer nach  $\omega$ . Es ist

$$\begin{aligned} |f(i\omega)|^2 &= (c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2, \\ \frac{d}{d\omega} |f(i\omega)|^2 &= -4a\omega(c - a\omega^2) + 2b^2\omega. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck verschwindet für:

$$(5) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= 0, \\ \omega_2 &= \frac{1}{2a} \sqrt{4ac - 2b^2}. \end{aligned}$$

Ist  $4ac > 2b^2$ , so erhalte ich für den 1. Wert das Maximum.

$$(6) \quad f(i\omega_1) = c$$

und für den 2. Wert das Minimum

$$(7) \quad f(i\omega_2) = b \left( \frac{b}{2a} + i\omega_2 \right).$$

Ist  $4ac < 2b^2$ , so ist nur für  $\omega = 0$  ein extremer Wert vorhanden, und zwar ein Minimum. Physikalisch ist die Bedeutung



des Minimums die, daß hier die erzwungene Schwingung  $re^{i\omega t}$  durch die kleinste, bei gegebenen  $a, b, c$  ausreichende erregende Schwingung  $Ce^{i\omega t}$  hervorgerufen wird. Es ist also der Fall der besten Wirkung. Mit abnehmendem  $b$  kann  $C$  nach (7) sogar beliebig klein werden. Ist  $b$  sehr klein, so sind (5):

$$i\omega_2 = \frac{i}{2a} \sqrt{4ac - 2b^2}$$

und der aus § 5 (4) für die freie Schwingung geltende Wert

$$n = -\frac{b}{2a} \pm \frac{i}{2a} \sqrt{4ac - b^2}$$

nicht sehr verschieden. Die beste Wirkung liegt dann also in der Nähe der Resonanz, wenn die Periode der freien und der erzwungenen Schwingung beinahe gleich sind. Die Phasenverschiebung zwischen der erregenden Schwingung  $Ce^{i\gamma}e^{i\omega t}$  und der erzwungenen Schwingung  $re^{i\omega t}$  ist dann nahezu  $\frac{\pi}{2}$ . (Sie ist genau  $\frac{\pi}{2}$ , wenn  $\omega = \sqrt{\frac{c}{a}}$ .)

Die Verhältnisse lassen sich gut in der Abb. 17 übersehen, wo die komplexen Zahlen durch Vektoren dargestellt sind. Es ist

$$AB = c,$$

$$BC = -a\omega^2,$$

$$CD = ib\omega,$$

$$AD = c - a\omega^2 + ib\omega.$$

Bei variablem  $\omega$  durchläuft  $D$  eine Parabel. Den verschiedenen  $b$  entsprechen die verschiedenen Parabeln,

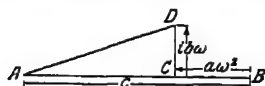


Abb. 17.

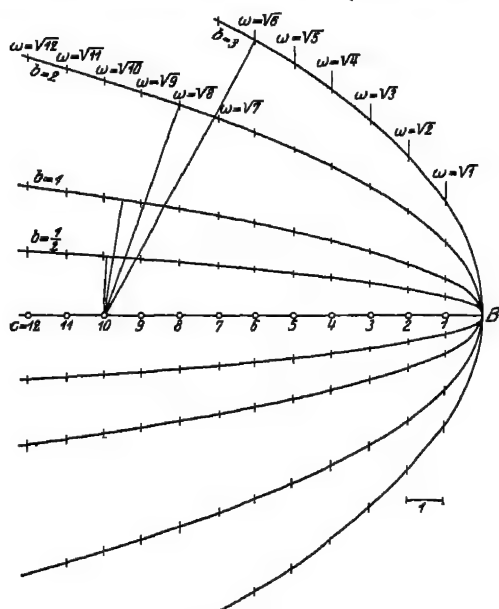


Abb. 18.

den verschiedenen  $c$  die verschiedenen Anfangspunkte des Vektors  $AD$ . In Abb. 18 ist  $a = 1$  angenommen. Für  $c = 10$  sind

die verschiedenen Minima gezeichnet. Man sieht, daß das Minimum sich mit wachsendem  $b$  gegen  $\omega = 0$  verschiebt und undeutlich wird.

Enthält z. B. eine Leitung, die an eine Klemmspannung  $E \sin(\gamma + \omega t)$  angeschlossen ist, die Selbstinduktion  $L$ , den Widerstand  $R$  und die Kapazität  $K$ , so ist, wenn  $J$  die Stromstärke bedeutet,

$$(8) \quad LJ + RJ + \frac{1}{K} \int J dt = E \sin(\gamma + \omega t),$$

oder, wenn ich zu komplexen Größen übergehe und differenziere,

$$(9) \quad L\dot{J} + RJ + \frac{1}{K} J = E i \omega e^{i\gamma} e^{i\omega t}.$$

Durch Vergleich mit (1) erhalte ich

$$a = L, \quad C = E i \omega,$$

$$b = R, \quad y = J,$$

$$c = \frac{1}{K}$$

Es entsteht ein sinusförmiger Wechselstrom  $J \sin(\gamma + \omega t)$ , und zwar ist nach (4)

$$(10) \quad J = \frac{i E \omega}{-L \omega^2 + \frac{1}{K} + i R \omega} = \frac{E}{R + i \left( L \omega - \frac{1}{K \omega} \right)}.$$

Den Nenner der rechten Seite bezeichnet man als Widerstandsoperator. Ich setze zur Abkürzung

$$(11) \quad S = L \omega - \frac{1}{K \omega},$$

$$(12) \quad T = R + i S.$$

Dann ist

$$J = \frac{E}{T}.$$

Das ist eine Verallgemeinerung des Ohmschen Gesetzes.  $S$  bezeichnet man als Querwiderstand. Er verschwindet, wenn

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L K}},$$

(10) geht dann in die gewöhnliche Form des Ohmschen Gesetzes über. Besteht die Leitung aus 2 Stücken, die hintereinander geschaltet sind, so addieren sich die Operatoren  $T_1$  und  $T_2$  vek-

toriell. Besteht die Leitung aus 2 Stücken, die nebeneinander geschaltet sind, so addieren sich die reziproken Widerstandsoperatoren (Leitfähigkeiten) vektoriell.

$$\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} = \frac{1}{T}.$$

Diese Addition kann man auf 2 Arten ausführen.

1. Ich bestimme zu  $T_1$  und  $T_2$  die reziproken komplexen Zahlen  $\frac{1}{T_1}$  und  $\frac{1}{T_2}$  durch Inversion am Einheitskreis. Dann addiere ich  $\frac{1}{T_1}$  und  $\frac{1}{T_2}$  vektoriell und bestimme zur Summe  $\frac{1}{T}$  wieder die reziproke Zahl  $T$  durch Inversion.

2. Ich zeichne über einer Strecke  $AC$  2 rechtwinklige Dreiecke  $ACB$  und  $ACD$ , deren Katheten sich wie  $R_1$  zu  $S_1$  resp.  $R_2$  zu  $S_2$  verhalten, und zwar nach unten, wenn  $S$  positiv und nach oben, wenn  $S$  negativ ist. Nun teile ich die Katheten  $AB$  und  $AD$  im Verhältnis  $\frac{1}{R_1}$  resp.  $\frac{1}{R_2}$ .

Die entstehenden Strecken  $AE$  und  $AF$  addiere ich vektoriell und bringe die Resultante

$AG$  mit dem Kreis über  $AC$  in  $H$  zum Schnitt. Dann ist  $R = \frac{AH}{AG}$  und  $S = \frac{HC}{AG}$ . Der Beweis ergibt sich leicht aus der Abb., wenn man beachtet, daß  $\frac{R_1 + iS_1}{T_1} = 1$  und  $\frac{R_2 + iS_2}{T_2} = 1$ . In der Abb. 19 ist speziell  $R_1 = 4$ ,  $S_1 = -6$ ,  $R_2 = 2$ ,  $S_2 = 4$ .

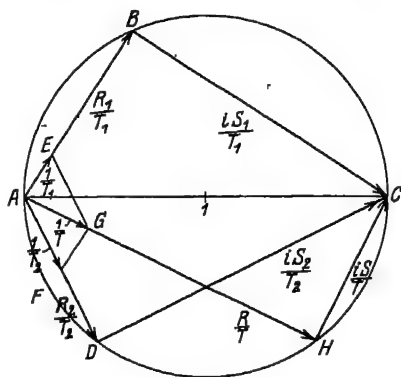


Abb. 19

### § 15. $y'' = F(x)$ .

Zu dieser inhomogenen Differentialgleichung möge noch eine der folgenden 3 Grenzbedingungen treten [§ 2 (2)]

$$(1) \quad \begin{cases} a) & y(0) = 0 & y(1) = 0, \\ b) & y(0) = 0 & y'(1) = 0, \\ c) & y'(0) = 0 & y(1) = 0. \end{cases}$$

Das Integral ist offenbar

$$y = \int dx \int F(x) dx + K + Lx,$$

wobei die Konstanten  $K$  und  $L$  so bestimmt werden müssen, daß die Grenzbedingungen befriedigt werden. Ich will jedoch hier einmal ganz anders verfahren, indem ich die im § 2 gegebenen unstetigen Lösungen der homogenen Differentialgleichung.

$$(2) \quad y'' = 0$$

benutze. Nenne ich die Lösungen  $G(x, \alpha)$  (Greensche Funktion), so ist nach § 2 (12)

$$(3) \quad \begin{cases} \text{a) } G(x, \alpha) = \begin{cases} (1 - \alpha)x, & \text{wenn } x < \alpha, \\ \alpha(1 - x), & \text{wenn } x > \alpha, \end{cases} \\ \text{b) } G(x, \alpha) = \begin{cases} x, & \text{wenn } x < \alpha, \\ \alpha, & \text{wenn } x > \alpha, \end{cases} \\ \text{c) } G(x, \alpha) = \begin{cases} 1 - \alpha, & \text{wenn } x < \alpha, \\ 1 - x, & \text{wenn } x > \alpha. \end{cases} \end{cases}$$

Die Funktion  $G(x, \alpha)$  hat dann folgende Eigenschaften

$$(I) \quad G''(x, \alpha) = 0,$$

$$(II) \quad \text{a) } G(0, \alpha) = G(1, \alpha) = 0,$$

$$\text{b) } G'(0, \alpha) = G'(1, \alpha) = 0,$$

$$\text{c) } G'(0, \alpha) = G'(1, \alpha) = 0,$$

$$(III) \quad G'(\alpha - 0, \alpha) - G'(\alpha + 0, \alpha) = 1,$$

$$(III') \quad G'(x, x + 0) - G'(x, x - 0) = 1.$$

Aus den Eigenschaften (I), (II), (III') folgt, daß eine Lösung unserer Differentialgleichung folgendes Integral ist

$$(4) \quad y = - \int_0^1 G(x, \alpha) F(\alpha) d\alpha$$

Wegen (II) erfüllt nämlich  $y$  die Grenzbedingungen. Es muß also noch bewiesen werden, daß  $y$  auch die Differentialgleichung erfüllt. Es ist

$$(5) \quad y' = - \int_0^1 G'(x, \alpha) F(\alpha) d\alpha.$$

Wenn ich nun weiter differenziere, muß ich beachten, daß  $G'(x, \alpha)$  an der Stelle  $x = \alpha$  unstetig ist. Es ist

$$(6) \quad y'' = - \int_0^x G''(x, \alpha) F(\alpha) d\alpha - G'(x, x-0) F(x) \\ - \int_x^1 G''(x, \alpha) F(\alpha) d\alpha + G'(x, x+0) F(x)$$

oder wegen (I).

$$(7) \quad y'' = [G'(x, x+0) - G'(x, x-0)] F(x)$$

und daher wegen (III')

$$y'' = F(x)$$

Beispiele für die Grenzbedingungen (1a)

$$F(x) = x^n \quad y = - (1-x) \int_0^x \alpha \alpha^n d\alpha - x \int_x^1 (1-\alpha) \alpha^n d\alpha,$$

$$y = \frac{x^{n+2} - x}{(n+1)(n+2)}$$

$$F(x) = e^{nx} \quad y = - (1-x) \int_0^x \alpha e^{n\alpha} d\alpha - x \int_x^1 (1-\alpha) e^{n\alpha} d\alpha,$$

$$y = \frac{1}{n^2} (e^{nx} - x e^n + x - 1)$$

### § 16. $y'' + \omega^2 y = F(x)$ .

Zu der Differentialgleichung mögen die Grenzbedingungen § 2 (2) hinzutreten

$$(1) \quad \begin{cases} \text{a) } y(0) = 0 & y(1) = 0, \\ \text{b) } y(0) = 0 & y'(1) = 0, \\ \text{c) } y'(0) = 0 & y(1) = 0, \\ \text{d) } y'(0) = 0 & y'(1) = 0 \end{cases}$$

Man kann wie im vorigen § die obige inhomogene Differentialgleichung lösen mit Hilfe der im § 2 gegebenen unstetigen Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$(2) \quad y'' + \omega^2 y = 0$$

Es ist nach § 2 (10)

$$(3a) \quad G(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{\sin \omega (1-\alpha) \sin \omega x}{\omega \sin \omega}, & \text{wenn } x < \alpha, \\ \frac{\sin \omega \alpha \sin \omega (1-x)}{\omega \sin \omega}, & \text{wenn } x > \alpha, \end{cases}$$

$$(3b) \quad G(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{\cos \omega (1 - \alpha) \sin \omega x}{\omega \cos \omega}, & \text{wenn } x < \alpha, \\ \frac{\sin \omega \alpha \cos \omega (1 - x)}{\omega \cos \omega}, & \text{wenn } x > \alpha, \end{cases}$$

$$(3c) \quad G(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{\sin \omega (1 - \alpha) \cos \omega x}{\omega \cos \omega}, & \text{wenn } x < \alpha, \\ \frac{\cos \omega \alpha \sin \omega (1 - x)}{\omega \cos \omega}, & \text{wenn } x > \alpha, \end{cases}$$

$$(3d) \quad G(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{\cos \omega (1 - \alpha) \cos \omega x}{-\omega \sin \omega}, & \text{wenn } x < \alpha, \\ \frac{\cos \omega \alpha \cos \omega (1 - x)}{-\omega \sin \omega}, & \text{wenn } x > \alpha. \end{cases}$$

Die Funktion  $G(x, \alpha)$  hat dann folgende Eigenschaften, die man aus den Ausdrücken (3) leicht herleiten kann

$$(I) \quad G''(x, \alpha) + \omega^2 G(x, \alpha) = 0$$

$$(II) \quad \begin{cases} a) & G(0, \alpha) = 0 & G(1, \alpha) = 0, \\ b) & G(0, \alpha) = 0 & G'(1, \alpha) = 0, \\ c) & G'(0, \alpha) = 0 & G(1, \alpha) = 0, \\ d) & G'(0, \alpha) = 0 & G'(1, \alpha) = 0 \end{cases}$$

$$(III) \quad G'(\alpha - 0, \alpha) - G'(\alpha + 0, \alpha) = 1$$

$$(III') \quad G'(x, x + 0) - G'(x, x - 0) = 1$$

Aus den Eigenschaften (I), (II), (III') folgt, daß eine Lösung unserer Differentialgleichung folgendes Integral ist

$$(4) \quad y = - \int_0^1 G(x, \alpha) F(\alpha) d\alpha$$

Wegen (II) erfüllt nämlich  $y$  die Grenzbedingungen. Es muß also noch bewiesen werden, daß  $y$  auch die Differentialgleichung erfüllt. Es ist

$$(5) \quad y' = - \int_0^1 G'(x, \alpha) F(\alpha) d\alpha.$$

Wenn ich nun weiter differenziere, muß ich beachten, daß  $G'(x, \alpha)$  an der Stelle  $x = \alpha$  unstetig ist. Es ist

$$\begin{aligned} y'' &= - \int_0^x G''(x, \alpha) F(\alpha) d\alpha - G'(x, x - 0) F(x) \\ &\quad - \int_x^1 G''(x, \alpha) F(\alpha) d\alpha + G'(x, x + 0) F(x) \end{aligned}$$

$$\S 17 \quad \sum_{i=0}^p a_i \frac{d^i y}{dx^i} = \sum_{\mu} C_{\mu} e^{m_{\mu} x}.$$

oder wegen (I)

$$y'' = \int_0^1 \omega^2 G(x, \alpha) F(\alpha) d\alpha + [G'(x, x+0) - G'(x, x-0)] F(x).$$

Nach (4) ist daher

$$(7) \quad y'' + \omega^2 y = [G'(x, x+0) - G'(x, x-0)] F(x)$$

und wegen (III')  $y'' + \omega^2 y = F(x).$

Beispiel für die Grenzbedingung (1a):

$$\begin{aligned} F(x) = e^{nx} \quad y &= -\frac{\sin \omega (1-x)}{\omega \sin \omega} \int_0^x e^{n\alpha} \sin \omega \alpha d\alpha \\ &\quad - \frac{\sin \omega x}{\omega \sin \omega} \int_x^1 e^{n\alpha} \sin \omega (1-\alpha) d\alpha \\ y &= \frac{(x-1) \sin \omega + e^{nx} \sin \omega - e^n \sin \omega x}{(n^2 + \omega^2) \sin \omega} \end{aligned}$$

In derselben Weise läßt sich die Differentialgleichung

$$y'' - \omega^2 y = F(x)$$

behandeln mit Hilfe der im § 4 gegebenen unstetigen Lösungen.

$$\S 17. \quad \sum_{i=0}^p a_i \frac{d^i y}{dx^i} = \sum_{\mu} C_{\mu} e^{m_{\mu} x}.$$

Ich betrachte zunächst die folgende Differentialgleichung

$$(1) \quad \sum_{i=0}^p a_i \frac{d^i y}{dx^i} = C_{\mu} e^{m_{\mu} x}.$$

Ein partikulares Integral ist

$$(2) \quad y = r_{\mu} e^{m_{\mu} x}.$$

Daraus folgt

$$(3) \quad \frac{d^i y}{dx^i} = m_{\mu}^i r_{\mu} e^{m_{\mu} x}$$

Setze ich (3) in (1) ein, so wird

$$(4) \quad r_{\mu} e^{m_{\mu} x} \sum_{i=0}^p a_i m_{\mu}^i = C_{\mu} e^{m_{\mu} x}.$$

Setze ich nun zur Abkürzung

$$(5) \quad \sum_{i=0}^p a_i m_\mu^i = f_\mu,$$

so ist

$$(6) \quad \begin{aligned} r_\mu f_\mu &= C_\mu, \\ r_\mu &= \frac{C_\mu}{f_\mu} \end{aligned}$$

Das partikuläre Integral der in der Überschrift stehenden Differentialgleichung ist nun einfach

$$(7) \quad y = \sum_{\mu} r_\mu e^{m_\mu x}$$

Ist auf der rechten Seite der Differentialgleichung ein  $m_\mu$  komplex

$$m_\mu = \beta_\mu + i \omega_\mu,$$

so nehme ich auch das zugehörige  $C_\mu$  komplex an. Ich kann dann das entsprechende Glied auf die folgende Form bringen

$$C_\mu e^{\beta_\mu x} \sin(\gamma_\mu + \omega_\mu x).$$

Die Methode versagt, wenn  $m_\mu$  eine Wurzel der Gleichung

$$(8) \quad \sum_{i=0}^p a_i n^i = f = 0$$

ist, weil dann nach (5)  $r_\mu = \infty$  wird. In diesem Falle verfährt man genau wie im § 10 für den Fall verfahren wurde, daß (8) eine  $(r+1)$ -fache Wurzel besaß. Ich setze jetzt voraus, daß  $m_\mu$  eine  $r$ -fache Wurzel von (8) ist. Dann ist ein partikulares Integral

$$(9) \quad y = r_\mu x^r e^{m_\mu x},$$

wenn  $r_\mu$  geeignet bestimmt wird. Setze ich nämlich (8) in (1) ein, so folgt genau wie im § 10

$$(10) \quad r_\mu e^{m_\mu x} \sum_{\kappa=0}^r \left( \frac{d^\kappa f}{d n^\kappa} \right)_{n=m_\mu} \binom{r}{\kappa} x^{r-\kappa} = C_\mu e^{m_\mu x}.$$

Da nun  $m_\mu$  eine  $r$ -fache Wurzel von (8) sein soll, ist

$$\left( \frac{d^\kappa f}{d n^\kappa} \right)_{n=m_\mu} = 0 \quad \text{für} \quad \kappa = 0 \quad (r-1)$$



$$\S 18. \sum_{i=0}^p a_i \frac{d^i y}{dx^i} = \sum_{\gamma} C_{\gamma} x^{\gamma}.$$

Daher ist nach (10)

$$(11) \quad r_{\mu} \left( \frac{d^r f}{dn^r} \right)_{n=n_{\mu}} = C_{\mu},$$

$$r_{\mu} = \frac{C_{\mu}}{\left( \frac{d^r f}{dn^r} \right)_{n=n_{\mu}}}.$$

Lautet z. B. die Gleichung (1) speziell folgendermaßen

$$(12) \quad \sum_{i=r}^p a_i \frac{d^i y}{dx^i} = C,$$

so hat (7) die  $r$ -fache Wurzel 0. Ebenso ist rechts  $m_{\mu} = 0$ .  
Es ist

$$\left( \frac{d^r f}{dn^r} \right)_{n=0} = r! a_r$$

Nach (9) und (11) ist daher:

$$(13) \quad y = \frac{C}{r! a_r} x^r$$

$$\S 18. \sum_{i=0}^p a_i \frac{d^i y}{dx^i} = \sum_{\gamma} C_{\gamma} x^{\gamma}.$$

Ich betrachte zunächst die folgende Differentialgleichung

$$(1) \quad \sum_{i=0}^p a_i \frac{d^i y}{dx^i} = C_{\gamma} x^{\gamma}.$$

Ein partikulares Integral ist

$$(2) \quad y = \sum_{\nu=0}^{\gamma} r_{\gamma, \nu} x^{\nu},$$

wenn die  $r_{\gamma, \nu}$  geeignet bestimmt werden. Aus (2) folgt

$$\frac{d^i y}{dx^i} = \sum_{\nu=i}^{\gamma} r_{\gamma, \nu} \nu (\nu-1) \dots (\nu-i+1) x^{\nu-i} = \sum_{\nu=i}^{\gamma} r_{\gamma, \nu} \frac{\nu!}{(\nu-i)!} x^{\nu-i}.$$

Führe ich einen neuen Summationsbuchstaben ein  $\nu' = \nu - i$ ,  
so ist, wenn ich den Strich von  $\nu'$  gleich wieder unterdrücke,

$$(3) \quad \frac{d^i y}{dx^i} = \sum_{\nu=0}^{\gamma-i} r_{\gamma, \nu+i} \frac{(\nu+i)!}{\nu!} x^{\nu}.$$

Setze ich (3) in (1) ein, so wird

$$\sum_{i=0}^p a_i \sum_{v=0}^{\gamma-i} r_{\gamma, v+i} \frac{(\nu+i)!}{\nu!} x^\nu = C_\gamma x^\gamma.$$

Ordne ich die Summe um, so kann ich schreiben:

$$(4) \quad \sum_{v=0}^{\gamma} \left( \sum_{i=0}^{\gamma-v} a_i \frac{(\nu+i)!}{\nu!} r_{\gamma, v+i} \right) x^\nu = C_\gamma x^\gamma,$$

wobei ich noch festsetzen muß, daß  $a_i = 0$ , wenn  $i > p$ . Setze ich nun noch zur Abkürzung:

$$(5) \quad a_i \frac{(\nu+i)!}{\nu!} = c_{vi},$$

so folgt aus (4).

$$(6) \quad \sum_{i=0}^{\gamma-v} c_{vi} r_{\gamma, v+i} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } v = 0 \\ C_\gamma, & \text{wenn } v = \gamma. \end{cases}$$

Das sind  $\gamma+1$  lineare Gleichungen für die  $\gamma+1$  Unbekannten  $r_{\gamma, v}$  des Ansatzes (2). Schreibe ich sie in extenso hin, so erhalte ich

$$(6') \quad \begin{cases} c_{00} r_{\gamma 0} + c_{01} r_{\gamma 1} + c_{02} r_{\gamma 2} + \dots + c_{0, \gamma-1} r_{\gamma, \gamma-1} + c_{0, \gamma} r_{\gamma \gamma} = 0, \\ c_{10} r_{\gamma 1} + c_{11} r_{\gamma 2} + \dots + c_{1, \gamma-2} r_{\gamma, \gamma-1} + c_{1, \gamma-1} r_{\gamma \gamma} = 0, \\ c_{20} r_{\gamma 2} + \dots + c_{2, \gamma-3} r_{\gamma, \gamma-1} + c_{2, \gamma-2} r_{\gamma \gamma} = 0, \\ \vdots \\ c_{\gamma-1, 0} r_{\gamma, \gamma-1} + c_{\gamma-1, 1} r_{\gamma \gamma} = 0, \\ c_{\gamma, 0} r_{\gamma \gamma} = C_\gamma \end{cases}$$

Ich kann sie also von der letzten beginnend leicht sukzessiv auflösen:

$$(6'') \quad \begin{cases} r_{\gamma, \gamma} = \frac{C_\gamma}{c_{\gamma, 0}}, \\ r_{\gamma, \gamma-1} = - \frac{c_{\gamma-1, 1} r_{\gamma, \gamma}}{c_{\gamma-1, 0}} = - \frac{c_{\gamma-1, 1} C_\gamma}{c_{\gamma-1, 0} c_{\gamma, 0}}, \\ r_{\gamma, \gamma-2} = - \frac{c_{\gamma-2, 1} r_{\gamma, \gamma-1}}{c_{\gamma-2, 0}} - \frac{c_{\gamma-2, 2} r_{\gamma \gamma}}{c_{\gamma-2, 0}} = \\ \quad + \frac{c_{\gamma-2, 1} c_{\gamma-1, 1} C_\gamma}{c_{\gamma-2, 0} c_{\gamma-1, 0} c_{\gamma, 0}} - \frac{c_{\gamma-2, 2} C_\gamma}{c_{\gamma-2, 0} c_{\gamma, 0}} \end{cases}$$

$$\S 19. \sum_{i=0}^p a_i \frac{d^i y}{dx^i} = \sum_{\gamma} \sum_{\mu} C_{\gamma \mu} x^{\gamma} e^{m_{\mu} x}. \quad 45$$

Das partikuläre Integral der in der Überschrift stehenden Differentialgleichung ist.

$$(7) \quad y = \sum_{\gamma} \sum_{\nu=0}^{\gamma} r_{\gamma \nu} x^{\nu},$$

wobei die einzelnen  $r_{\gamma \nu}$  aus den Gl. (6'') zu berechnen sind. Haben wir statt (1) die Gleichung

$$(8) \quad \sum_{i=r}^p a_i \frac{d^i y}{dx^i} = C_{\gamma} x^{\gamma},$$

so ist also  $a_i = 0$  für  $i = 0 \dots r-1$  und daher nach (5) auch  $c_{\nu i} = 0$  für  $i = 0 \dots r-1$ . In den Gleichungen (6) sind dann die  $r_{\gamma, 0} \dots r_{\gamma, r-1}$  nicht enthalten. Diese Größen bleiben dann also willkürlich.

$$\S 19. \sum_{i=0}^p a_i \frac{d^i y}{dx^i} = \sum_{\gamma} \sum_{\mu} C_{\gamma \mu} x^{\gamma} e^{m_{\mu} x}.$$

Die Gleichung § 14 und 15 sind Spezialfälle der obigen Differentialgleichung. Ich betrachte wieder zunächst folgende Gleichung:

$$(1) \quad \sum_{i=0}^p a_i \frac{d^i y}{dx^i} = C_{\gamma \mu} x^{\gamma} e^{m_{\mu} x}.$$

Ein partikulares Integral ist.

$$(2) \quad y = e^{m_{\mu} x} \sum_{\nu=0}^{\gamma} r_{\gamma \mu, \nu} x^{\nu},$$

wobei die  $r_{\gamma \mu, \nu}$  in folgender Weise zu bestimmen sind. Nach der schon in § 10 benutzten Formel

$$\frac{d^i f g}{dx^i} = \sum_{\kappa=0}^i \binom{i}{\kappa} \frac{d^{\kappa} f}{dx^{\kappa}} \frac{dg^{i-\kappa}}{dx^{i-\kappa}}$$

ist, wenn ich

$$f(x) = e^{m_{\mu} x},$$

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\gamma} r_{\gamma \mu, \nu} x^{\nu}$$

setze

$$\frac{d^{\kappa} f(x)}{dx^{\kappa}} = m_{\mu}^{\kappa} e^{m_{\mu} x},$$

$$\frac{d^{i-\kappa} g(x)}{dx^{i-\kappa}} = \sum_{\nu=i-\kappa}^{\gamma} r_{\gamma\mu\nu} \frac{\nu!}{[\nu-(i-\kappa)]!} x^{\nu-i+\kappa},$$

$$\frac{d^i y}{dx^i} = e^{m_\mu x} \sum_{\kappa=0}^i \sum_{\nu=i-\kappa}^{\gamma} \binom{i}{\kappa} \frac{\nu!}{[\nu-(i-\kappa)]!} m_\mu^\kappa r_{\gamma\mu\nu} x^{\nu-i+\kappa}$$

oder, wenn ich die Bezeichnung der Summationsbuchstaben andere, indem ich  $\kappa$  durch  $i - \kappa'$  und  $\nu$  durch  $\nu' + i - \kappa$  ersetze und die Striche gleich wieder unterdrücke

$$(3) \quad \frac{d^i y}{dx^i} = e^{m_\mu x} \sum_{\kappa=0}^i \sum_{\nu=0}^{\gamma-i} \binom{i}{\kappa} \frac{(\nu+\kappa)!}{\nu!} m_\mu^{i-\kappa} r_{\gamma,\mu,\nu+\kappa} x^\nu$$

Setze ich das in (1) ein, so ist

$$e^{m_\mu x} \sum_{i=0}^p \sum_{\kappa=0}^i \sum_{\nu=0}^{\gamma-i} a_i \binom{i}{\kappa} \frac{(\nu+\kappa)!}{\nu!} m_\mu^{i-\kappa} r_{\gamma,\mu,\nu+\kappa} x^\nu = C_{\gamma\mu} x^\gamma e^{m_\mu x}.$$

Ich ordne nun die dreifache Summe um.

$$\sum_{\nu=0}^{\gamma} \sum_{\kappa=0}^{\gamma-\nu} \sum_{i=\kappa}^p a_i \binom{i}{\kappa} \frac{(\nu+\kappa)!}{\nu!} m_\mu^{i-\kappa} r_{\gamma,\mu,\nu+\kappa} x^\nu = C_{\gamma\mu} x^\gamma.$$

Setze ich die gleichhohen Potenzen von  $x$  einander gleich, so ist

$$(4) \quad \sum_{\kappa=0}^{\gamma-\nu} \sum_{i=\kappa}^p a_i \binom{i}{\kappa} \frac{(\nu+\kappa)!}{\nu!} m_\mu^{i-\kappa} r_{\gamma,\mu,\nu+\kappa} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \nu=0 \quad \gamma-1 \\ C_{\gamma\mu}, & \text{wenn } \nu=\gamma. \end{cases}$$

Ich setze zur Abkürzung

$$(5) \quad \sum_{i=\kappa}^p a_i \binom{i}{\kappa} \frac{(\nu+\kappa)!}{\nu!} m_\mu^{i-\kappa} = c_{\nu\kappa}$$

Dann ist nach (4)

$$(6) \quad \sum_{\kappa=0}^{\gamma-\nu} c_{\nu\kappa} r_{\gamma,\mu,\nu+\kappa} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \nu=0 \quad \gamma-1 \\ C_{\gamma\mu}, & \text{wenn } \nu=\gamma \end{cases}$$

Das sind dieselben Gleichungen wie im vorigen Paragraph. Sie können also auch ebenso sukzessiv aufgelöst werden

Das partikuläre Integral der in der Überschrift stehenden Differentialgleichung ist

$$(7) \quad y = \sum_{\gamma} \sum_{\mu} e^{m_\mu x} \sum_{\nu=0}^{\gamma} r_{\gamma\mu\nu} x^\nu,$$

wobei sich die  $r_{\gamma\mu\nu}$  aus (5) und (6) ergeben.

$$\S 20. \sum_{i=0}^p a_i \frac{d^i y}{dx^i} = F(x).$$

$$\S 20. \sum_{i=0}^p a_i \frac{d^i y}{dx^i} = F(x).$$

Die Lösung der homogenen Gleichung ist

$$(1) \quad y = \sum_{\mu=1}^p k_{\mu} e^{n_{\mu} x},$$

wobei die  $n_{\mu}$  die Wurzeln der Gleichung

$$(2) \quad f(n) = \sum_{i=0}^p a_i n^i = 0$$

sind. Ich versuche nun, ein Integral der inhomogenen Gleichung zu finden, indem ich in (1) die  $k_{\mu}$  nicht als Konstanten, sondern als Funktionen von  $x$  betrachte. Dann ist:

$$y' = \sum k_{\mu} n_{\mu} e^{n_{\mu} x} + \sum k'_{\mu} e^{n_{\mu} x}.$$

Ich setze nun.

$$\sum k'_{\mu} e^{n_{\mu} x} = 0$$

Dann ist

$$y'' = \sum k_{\mu} n_{\mu}^2 e^{n_{\mu} x} + \sum k'_{\mu} n_{\mu} e^{n_{\mu} x}.$$

Ich setze weiter.

$$\sum k'_{\mu} n_{\mu} e^{n_{\mu} x} = 0$$

und fahre so fort. Dadurch erhalte ich schließlich:

$$(3) \quad \frac{d^p y}{dx^p} = \sum k_{\mu} n_{\mu}^p e^{n_{\mu} x} + \sum k'_{\mu} n_{\mu}^{p-1} e^{n_{\mu} x}$$

Es ist also

$$(4) \quad \frac{d^i y}{dx^i} = \sum k_{\mu} n_{\mu}^i e^{n_{\mu} x} \quad \text{für } i = 1 \quad p-1,$$

$$(5) \quad \sum k'_{\mu} n_{\mu}^i e^{n_{\mu} x} = 0 \quad \text{für } i = 0 \quad p-2$$

Setze ich (3) und (4) in unsere Differentialgleichung ein, so ist

$$\sum_{i=0}^p a_i \sum k_{\mu} n_{\mu}^i e^{n_{\mu} x} + \sum k'_{\mu} n_{\mu}^{p-1} e^{n_{\mu} x} = F(x).$$

Die 1. Summe kann ich aber wie folgt umformen

$$\sum k_{\mu} e^{n_{\mu} x} \sum a_i n_{\mu}^i.$$

Sie ist daher nach (2) Null. Zur Bestimmung der  $k'_{\mu}$  habe ich also die  $p$ -Gleichungen

$$\sum k'_{\mu} n_{\mu}^i e^{n_{\mu} x} = \begin{cases} 0 & \text{für } i = 0 \quad p-2, \\ F(x) & \text{für } i = p-1. \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich leicht nach den  $k'_\mu$  auflösen. Es ist

$$(6) \quad k'_\mu = \frac{F(x) e^{-n_\mu x}}{\prod_{r \neq \mu} (n_\mu - n_r)}.$$

Daher ist nach (1)

$$(7) \quad y = \sum_{\mu=1}^p \frac{e^{n_\mu x} \int F(x) e^{-n_\mu x} dx}{\prod_{r \neq \mu} (n_\mu - n_r)}.$$

Damit ist die Lösung der Differentialgleichung auf eine Integration zurückgeführt

Die Fälle, in denen diese Integration wirklich durchführbar ist, lassen sich allerdings, wie in den §§ 15—17 gezeigt, ohne der Umweg über das Integral behandeln. Auch war dabei die Lösung der Gl. (2) nicht erforderlich.

Beispiele.

I

$$F(x) = e^{mx},$$

$$\int F(x) e^{-n_\mu x} dx = \frac{1}{m - n_\mu} e^{(m - n_\mu)x},$$

$$e^{n_\mu x} \int F(x) e^{-n_\mu x} dx = \frac{1}{m - n_\mu} e^{mx},$$

$$y = e^{mx} \sum_{\mu=1}^p \frac{1}{(m - n_\mu) \prod (n_\mu - n_r)}.$$

II. Ist zweitens

$$F(x) = G(x) e^{mx},$$

wobei  $G(x)$  eine ganze rationale Funktion vom  $r$ -ten Grade sein soll, so ist

$$\int G(x) e^{(m - n_\mu)x} dx = \frac{e^{(m - n_\mu)x}}{m - n_\mu}$$

$$\left\{ G(x) - \frac{G'(x)}{m - n_\mu} + \frac{G''(x)}{(m - n_\mu)^2} - \dots + (-1)^r \frac{G^{(r)}(x)}{(m - n_\mu)^r} \right\},$$

$$y = e^{mx} \sum_{\mu=1}^p \frac{1}{(m - n_\mu) \prod (n_\mu - n_r)}$$

$$\left\{ G(x) - \frac{G'(x)}{m - n_\mu} + \frac{G''(x)}{(m - n_\mu)^2} - \dots + (-1)^r \frac{G^{(r)}(x)}{(m - n_\mu)^r} \right\}$$

## II. Kapitel. Systeme von 2 gewöhnlichen Differentialgleichungen<sup>1)</sup>.

§ 1.  $\alpha_1 \ddot{y}_1 + c_1 y_1 = 0$ , Ungekoppelte Schwingungen.  
 $\alpha_2 \ddot{y}_2 + c_2 y_2 = 0$ .

Die Lösung dieser Gleichungen ist nach I § 1 (9).

$$(1) \quad \begin{aligned} y_1 &= k_1 \sin(\kappa_1 + \omega_1 t), \\ y_2 &= k_2 \sin(\kappa_2 + \omega_2 t) \end{aligned}$$

Denke ich mir  $y_1$  und  $y_2$  als rechtwinklige Koordinaten  $OQ'$  und  $Q'Q$  in einer Ebene (siehe Abb. 20), so stellen sie eine Kurve dar, deren Parametergleichung mit  $t$  als Parameter (1) ist. Es ist eine sogenannte Lissajousche Figur, wie sie beispielsweise auf dem Schirm der Braunschen Rohre erscheint Vgl Zenneck: „Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie“ (Stuttgart, Ferdinand Enke). Kap II, § 3. Ich kann mir ihre Gestalt in folgender Weise veranschaulichen: Ich nehme zu (1) noch eine 3. Koordinate hinzu:

$$(2) \quad y_3 = k_1 \cos(\kappa_1 + \omega_1 t).$$

Dann bestimmen nach I, § 1  $y_1$  und  $y_3$  einen Punkt  $P'$ , der sich auf dem Kreise um  $O$  vom Radius  $k_1$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  bewegt. In  $P'$  trage ich senkrecht zur Ebene des Kreises  $y_2$  noch einmal als  $P'P$  auf. Der Punkt  $P$  beschreibt dann eine Sinushnie auf dem Zylindermantel vom Durchmesser  $2k_1$ . Die

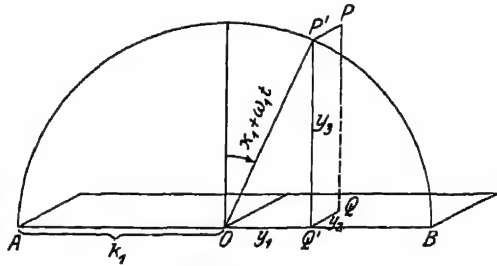


Abb. 20.

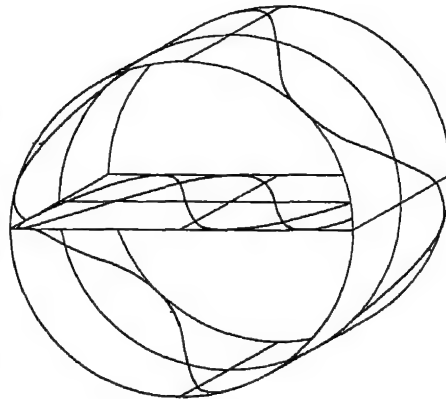


Abb. 21.

<sup>1)</sup> Vgl zu diesem Kapitel M. Wien „Über die Rückwirkung eines resonierenden Systems“ Wied Ann Bd 61, 1897

Projektion dieser Sinushnie auf die Ebene  $y_1 y_2$  gibt nun unsere Kurve (1) (siehe Abb 21, in der  $\kappa_2 - \kappa_1 = \frac{\pi}{4}$  und  $\omega_2 = 3\omega_1$  ist).

Führe ich 3 Einheitsvektoren  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  ein und bezeichne ich den räumlichen Vektor  $OP$  mit  $\bar{z}$ , so ist

$$(3) \bar{z} = k_1 \sin(\kappa_1 + \omega_1 t) \bar{e}_1 + k_2 \sin(\kappa_2 + \omega_2 t) \bar{e}_2 + k_1 \cos(\kappa_1 + \omega_1 t) \bar{e}_3.$$

Ist speziell  $\omega_1 = \omega_2$ , so kann ich dafür schreiben

$$\begin{aligned} \bar{z} = & \cos \omega t (k_1 \sin \kappa_1 \bar{e}_1 + k_2 \sin \kappa_2 \bar{e}_2 + k_1 \cos \kappa_1 \bar{e}_3) \\ & + \sin \omega t (k_1 \cos \kappa_1 \bar{e}_1 + k_2 \cos \kappa_2 \bar{e}_2 - k_1 \sin \kappa_1 \bar{e}_3). \end{aligned}$$

Die 1 Klammer ist der Wert von  $\bar{z}$  für  $t = 0$  und die 2 Klammer der Wert von  $\bar{z}$  für  $t = \frac{\pi}{2\omega}$ . Ich kann daher schreiben

$$\bar{z} = \cos \omega t \bar{z}(0) + \sin \omega t \bar{z}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right).$$

Da wir also  $\bar{z}$  durch 2 feste Vektoren ausdrücken können, muß  $\bar{z}$  bei veränderlichem  $t$  eine „ebene“ Kurve beschreiben, und zwar als Schnitt mit dem Kreiszylinder eine Ellipse. Die Projektion auf die Ebene  $\bar{e}_1 \bar{e}_2$  ist wieder eine Ellipse, die auch in eine Strecke ausarten kann. Ist speziell noch  $k_1 = k_2$  und  $\kappa_1 - \kappa_2 = \frac{\pi}{2}$ , so ist die Projektion ein Kreis

## § 2. $a_{11} \ddot{y}_1 + c_{11} \dot{y}_1 + a_{12} \ddot{y}_2 = 0$ , Beschleunigungskopplung $a_{21} \ddot{y}_1 + a_{22} \ddot{y}_2 + c_{22} \dot{y}_2 = 0$ .

Diese Differentialgleichungen sind die Differentialgleichungen der gekoppelten Schwingungen bei Beschleunigungskopplung.  $a_{12}$  und  $a_{21}$  sind die Kopplungskoeffizienten. Ich mache den Ansatz

$$(1) \quad \begin{aligned} y_1 &= r_1 k \sin(\kappa + \omega t), \\ y_2 &= r_2 k \sin(\kappa + \omega t). \end{aligned}$$

Dadurch gehen die Differentialgleichungen über in folgende homogenen Gleichungen für  $r_1$  und  $r_2$ :

$$(2) \quad \begin{aligned} (-a_{11} \omega^2 + c_{11}) r_1 - a_{12} \omega^2 r_2 &= 0, \\ -a_{21} \omega^2 r_1 + (-a_{22} \omega^2 + c_{22}) r_2 &= 0, \end{aligned}$$

Sie sind nur lösbar, falls ihre Determinante verschwindet. Daraus folgt für  $\omega^2$  die Gleichung



$$(3) \quad \begin{vmatrix} -a_{11}\omega^2 + c_{11} & -a_{12}\omega^2 \\ -a_{21}\omega^2 & -a_{22}\omega^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

$$(3a) \quad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\omega^4 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11})\omega^2 + c_{11}c_{22} = 0.$$

Ich führe folgende Abkürzungen ein

$$(4) \quad \frac{c_{11}}{a_{11}} = \gamma_I^2, \quad \frac{c_{22}}{a_{22}} = \gamma_{II}^2, \quad \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} = a$$

Dann wird (3a)

$$(5) \quad (1 - a)\omega^4 - (\gamma_I^2 + \gamma_{II}^2)\omega^2 + \gamma_I^2\gamma_{II}^2 = 0.$$

$$(6) \quad \omega^2 = \frac{1}{2(1-a)} \cdot (\gamma_I^2 + \gamma_{II}^2 \pm \sqrt{(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)^2 + 4a\gamma_I^2\gamma_{II}^2}).$$

Ist  $0 < a < 1$ , so ist  $\omega^2$  reell und positiv. Aus einer der beiden Gleichungen (2) kann man dann  $r_1$  und  $r_2$  bis auf einen gemeinsamen konstanten Faktor berechnen. Aus der 1. Gleichung (2) folgt:

$$(7) \quad \begin{aligned} r_1 &= +a_{12}\omega^2, \\ r_2 &= -a_{11}\omega^2 + c_{11}. \end{aligned}$$

Nach (6) gibt es nun zwei nicht nur durch das Vorzeichen verschiedene  $\omega$ . Ich will sie  $\omega_I$  und  $\omega_{II}$  nennen. Die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung ist dann:

$$(8) \quad \begin{aligned} y_1 &= r_{1I}k_I \sin(\kappa_I + \omega_I t) + r_{1II}k_{II} \sin(\kappa_{II} + \omega_{II} t), \\ y_2 &= r_{2I}k_I \sin(\kappa_I + \omega_I t) + r_{2II}k_{II} \sin(\kappa_{II} + \omega_{II} t). \end{aligned}$$

Ich betrachte nun noch 2 Spezialfälle:

a) Ist die Kopplung schwach ( $a$  klein), so ist in (6).

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_I &= \sqrt{\frac{1}{1-a} \left( \gamma_I^2 + \frac{a\gamma_I^2\gamma_{II}^2}{\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2} \right)} = \gamma_I + \frac{a\gamma_I\gamma_{II}^2}{2(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)} + \frac{1}{2}a\gamma_I \\ &= \gamma_I + \frac{a\gamma_I^3}{2(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)}, \\ \omega_{II} &= \sqrt{\frac{1}{1-a} \left( \gamma_{II}^2 - \frac{a\gamma_I^2\gamma_{II}^2}{\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2} \right)} = \gamma_{II} - \frac{a\gamma_I^2\gamma_{II}}{2(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)} + \frac{1}{2}a\gamma_{II} \\ &= \gamma_{II} - \frac{a\gamma_{II}^3}{2(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)}. \end{aligned} \right.$$

Ware keine Kopplung vorhanden, so würde das 1. System mit der Frequenz  $\gamma_I$ , das 2. mit der Frequenz  $\gamma_{II}$  schwingen

Durch die Verkopplung wird also die größere Frequenz weiter vergrößert zu  $\omega_I$  und die kleinere weiter verkleinert zu  $\omega_{II}$

b) Ist  $\gamma_I^2 = \gamma_{II}^2 = \gamma^2$ , so ist nach (6)

$$(10) \quad \begin{cases} \omega_I^2 = \gamma^2 \frac{1 + \sqrt{a}}{1 - a} = \frac{\gamma^2}{1 - \sqrt{a}}, \\ \omega_{II}^2 = \gamma^2 \frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a} = \frac{\gamma^2}{1 + \sqrt{a}}. \end{cases}$$

Nach (7) ist

$$(11) \quad \begin{cases} r_{1I} = \frac{a_{12} \gamma^2}{1 - \sqrt{a}}, & r_{1II} = \frac{a_{12} \gamma^2}{1 + \sqrt{a}}, \\ r_{2I} = \frac{-a_{11} \gamma^2 \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}, & r_{2II} = \frac{a_{11} \gamma^2 \sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}}. \end{cases}$$

Daher ist nach (8), wenn ich den  $r_{1I}$  und  $r_{2I}$  gemeinsamen Faktor  $\frac{\gamma^2}{1 - \sqrt{a}}$  in die willkürliche Konstante  $k_I$  und den  $r_{1II}$  und  $r_{2II}$  gemeinsamen Faktor  $\frac{\gamma^2}{1 + \sqrt{a}}$  in die willkürliche Konstante  $k_{II}$  hinneehme

$$(12) \quad \begin{cases} y_1 = a_{12} [ + k_I \sin(\kappa_I + \omega_I t) + k_{II} \sin(\kappa_{II} + \omega_{II} t) ], \\ y_2 = a_{11} \sqrt{a} [ - k_I \sin(\kappa_I + \omega_I t) + k_{II} \sin(\kappa_{II} + \omega_{II} t) ] \end{cases}$$

oder mit anderer Bezeichnung der willkürlichen Konstanten

$$(13) \quad \begin{cases} y_1 = a_{12} [ + K_I \cos \omega_I t + L_I \sin \omega_I t + K_{II} \cos \omega_{II} t + L_{II} \sin \omega_{II} t ], \\ y_2 = a_{11} \sqrt{a} [ - K_I \cos \omega_I t - L_I \sin \omega_I t + K_{II} \cos \omega_{II} t + L_{II} \sin \omega_{II} t ] \end{cases}$$

Die Konstanten bestimmen sich aus dem Anfangszustand folgendermaßen

$$(14) \quad \begin{cases} K_I = \frac{1}{2} \left( \frac{y_{10}}{a_{12}} - \frac{y_{20}}{a_{11} \sqrt{a}} \right), & L_I = \frac{1}{2 \omega_I} \left( \frac{y_{10}}{a_{12}} - \frac{y_{20}}{a_{11} \sqrt{a}} \right), \\ K_{II} = \frac{1}{2} \left( \frac{y_{10}}{a_{12}} + \frac{y_{20}}{a_{11} \sqrt{a}} \right), & L_{II} = \frac{1}{2 \omega_{II}} \left( \frac{y_{10}}{a_{12}} + \frac{y_{20}}{a_{11} \sqrt{a}} \right) \end{cases}$$

Ist speziell  $y_{20} = y_{10} = y_{20} = 0$ , so ist also

$$(15) \quad \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2} y_{10} (\cos \omega_I t + \cos \omega_{II} t), \\ y_2 = \frac{1}{2} y_{10} \sqrt{\frac{a_{11} a_{21}}{a_{12} a_{22}}} (\cos \omega_{II} t - \cos \omega_I t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \S 3. \quad a_{11} \dot{y}_1 + c_{11} y_1 + c_{12} y_2 &= 0, & \text{Kraftkopplung.} \\ c_{21} y_1 + a_{22} \dot{y}_2 + c_{22} y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichungen sind die Differentialgleichungen der gekoppelten Schwingungen bei Kraftkopplung.

Durch den Ansatz

$$\begin{aligned} (1) \quad y_1 &= r_1 k \sin(\kappa + \omega t), \\ y_2 &= r_2 k \sin(\kappa + \omega t) \end{aligned}$$

gehen sie über in.

$$\begin{aligned} (2) \quad &(-a_{11} \omega^2 + c_{11}) r_1 + c_{12} r_2 = 0, \\ &c_{21} r_1 + (-a_{22} \omega^2 + c_{22}) r_2 = 0. \end{aligned}$$

Diese homogenen Gleichungen sind nur lösbar, falls

$$(3) \quad \begin{vmatrix} -a_{11} \omega^2 + c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & -a_{22} \omega^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(3a) \quad a_{11} a_{22} \omega^4 - (a_{11} c_{22} + a_{22} c_{11}) \omega^2 + (c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}) = 0$$

Ich führe folgende Abkürzungen ein

$$(4) \quad \frac{c_{11}}{a_{11}} = \gamma_I^2, \quad \frac{c_{22}}{a_{22}} = \gamma_{II}^2, \quad \frac{c_{12} c_{21}}{a_{11} a_{22}} = c.$$

Dann wird (3a)

$$(5) \quad \omega^4 - (\gamma_I^2 + \gamma_{II}^2) \omega^2 + (\gamma_I^2 \gamma_{II}^2 - c) = 0,$$

daraus folgt

$$(6) \quad \omega^2 = \frac{1}{2}(\gamma_I^2 + \gamma_{II}^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)^2 + 4c}$$

Ist  $0 < c < \gamma_I^2 \gamma_{II}^2$ , so ist  $\omega^2$  reell und positiv. Aus der 1. Gl. (2) folgt nun

$$\begin{aligned} (7) \quad r_1 &= c_{12}, \\ r_2 &= a_{11} \omega^2 - c_{11} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung ist dann wieder, wie in § 2

$$\begin{aligned} (8) \quad y_1 &= r_{1I} k_I \sin(\kappa_I + \omega_I t) + r_{1II} k_{II} \sin(\kappa_{II} + \omega_{II} t), \\ y_2 &= r_{2I} k_I \sin(\kappa_I + \omega_I t) + r_{2II} k_{II} \sin(\kappa_{II} + \omega_{II} t) \end{aligned}$$

Ich betrachte noch 2 Spezialfälle

a) Ist die Kopplung schwach ( $c$  klein), so ist in (6)

$$\sqrt{(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)^2 + 4c} = \gamma_I^2 - \gamma_{II}^2 + \frac{2c}{\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2},$$

$$(9) \quad \begin{cases} \omega_I = \sqrt{\gamma_I^2 + \frac{c}{\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2}} = \gamma_I + \frac{c}{2\gamma_I(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)}, \\ \omega_{II} = \sqrt{\gamma_{II}^2 - \frac{c}{\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2}} = \gamma_{II} - \frac{c}{2\gamma_{II}(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)} \end{cases}$$

Ware keine Kopplung vorhanden, so würde das 1. System mit der Frequenz  $\gamma_I$ , das 2 mit der Frequenz  $\gamma_{II}$  schwingen. Durch die Verkopplung wird also die größere Frequenz weiter vergrößert zu  $\omega_I$  und die kleinere weiter verkleinert zu  $\omega_{II}$ .

b) Ist speziell  $\gamma_I^2 = \gamma_{II}^2 = \gamma^2$ , so ist nach (6)

$$(10) \quad \begin{aligned} \omega_I^2 &= \gamma^2 + \sqrt{c}, \\ \omega_{II}^2 &= \gamma^2 - \sqrt{c}. \end{aligned}$$

Nach (7) folgt daher

$$(11) \quad \begin{cases} r_{1I} = r_{1II} = c_{12}, \\ r_{2I} = a_{11}(\gamma^2 + \sqrt{c}) - c_{11} = +a_{11}\sqrt{c}, \\ r_{2II} = a_{11}(\gamma^2 - \sqrt{c}) - c_{11} = -a_{11}\sqrt{c} \end{cases}$$

Es ist daher nach (8)

$$(12) \quad \begin{aligned} y_1 &= c_{12} [ +k_I \sin(\kappa_I + \omega_I t) + k_{II} \sin(\kappa_{II} + \omega_{II} t) ], \\ y_2 &= a_{11} \sqrt{c} [ -k_I \sin(\kappa_I + \omega_I t) - k_{II} \sin(\kappa_{II} + \omega_{II} t) ]. \end{aligned}$$

oder mit anderer Bezeichnung der willkürlichen Konstanten

$$(13) \quad \begin{aligned} y_1 &= c_{12} [ +K_I \cos \omega_I t + L_I \sin \omega_I t + K_{II} \cos \omega_{II} t + L_{II} \sin \omega_{II} t ], \\ y_2 &= a_{11} \sqrt{c} [ -K_I \cos \omega_I t - L_I \sin \omega_I t + K_{II} \cos \omega_{II} t + L_{II} \sin \omega_{II} t ]. \end{aligned}$$

Die Konstanten bestimmen sich aus dem Anfangszustand folgendermaßen

$$(14) \quad \begin{cases} K_I = \frac{1}{2} \left( \frac{y_{10}}{c_{12}} - \frac{y_{20}}{a_{11} \sqrt{c}} \right), & L_I = \frac{1}{2\omega_I} \left( \frac{\dot{y}_{10}}{c_{12}} - \frac{\dot{y}_{20}}{a_{11} \sqrt{c}} \right), \\ K_{II} = \frac{1}{2} \left( \frac{y_{10}}{c_{12}} + \frac{y_{20}}{a_{11} \sqrt{c}} \right), & L_{II} = \frac{1}{2\omega_{II}} \left( \frac{\dot{y}_{10}}{c_{12}} + \frac{\dot{y}_{20}}{a_{11} \sqrt{c}} \right) \end{cases}$$

Ist speziell  $y_2 = \dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0$ , so ist also.

$$(15) \quad \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2} y_{10} (\cos \omega_I t + \cos \omega_{II} t), \\ y_2 &= \frac{1}{2} y_{10} \sqrt{\frac{a_{11} c_{21}}{a_{22} c_{12}}} (\cos \omega_{II} t - \cos \omega_I t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\S 4. \quad a_{11} \ddot{y}_1 + c_{11} \dot{y}_1 + a_{12} \ddot{y}_2 + c_{12} \dot{y}_2 &= 0, \\ a_{21} \ddot{y}_1 + c_{21} \dot{y}_1 + a_{22} \ddot{y}_2 + c_{22} \dot{y}_2 &= 0.\end{aligned}$$

Diese Differentialgleichungen sind die Differentialgleichungen für gekoppelte Schwingungen, wenn gleichzeitig Beschleunigungs- und Kraftkopplung vorliegt. Durch den Ansatz

$$\begin{aligned}(1) \quad y_1 &= r_1 k \sin(\kappa + \omega t), \\ y_2 &= r_2 k \sin(\kappa + \omega t)\end{aligned}$$

gehen unsere Differentialgleichungen über in:

$$\begin{aligned}(2) \quad (-a_{11}\omega^2 + c_{11})r_1 + (-a_{12}\omega^2 + c_{12})r_2 &= 0, \\ (-a_{21}\omega^2 + c_{21})r_1 + (-a_{22}\omega^2 + c_{22})r_2 &= 0\end{aligned}$$

Diese homogenen Gleichungen sind nur lösbar, falls.

$$(3) \quad \begin{vmatrix} -a_{11}\omega^2 + c_{11} & -a_{12}\omega^2 + c_{12} \\ -a_{21}\omega^2 + c_{21} & -a_{22}\omega^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Ich führe folgende Abkürzungen ein.

$$\begin{aligned}(4) \quad A_0 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ A_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & c_{12} \\ a_{21} & c_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ A_4 &= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

dann ist

$$(5) \quad A_0 \omega^4 - A_2 \omega^2 + A_4 = 0.$$

Diese Gleichung gibt aufgelöst

$$(6) \quad \omega^2 = \frac{1}{2A_0} (A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_0A_4}).$$

Aus der 1. Gleichung (2) folgt

$$\begin{aligned}(7) \quad r_1 &= +a_{12}\omega^2 - c_{12}, \\ r_2 &= -a_{11}\omega^2 + c_{11}\end{aligned}$$

Es sind nun folgende Fälle zu unterscheiden (vgl. I § 9)

$$I \quad A_2^2 - 4A_0A_4 > 0$$

*IA*  $A_0A_2A_4$  haben gleiches Vorzeichen. Dann sind in (6) beide  $\omega$  reell und die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung lautet, wie im § 2 und 3,

$$(8IA) \quad \begin{aligned} y_1 &= r_{1I} k_I \sin(\kappa_I + \omega_I t) + r_{1II} k_{II} \sin(\kappa_{II} + \omega_{II} t), \\ y_2 &= r_{2I} k_I \sin(\kappa_I + \omega_I t) + r_{2II} k_{II} \sin(\kappa_{II} + \omega_{II} t). \end{aligned}$$

*IB.*  $A_0A_4$  haben gleiches und  $A_2$  hat das entgegengesetzte Zeichen. Dann ist der Ansatz (1) nicht mehr brauchbar. Es muß an Stelle des  $\sin$  der  $\sin$  treten. Die allgemeine Lösung lautet:

$$(8IB) \quad \begin{aligned} y_1 &= r_{1I} k_I \sin(\kappa_I + \omega_I t) + r_{1II} k_{II} \sin(\kappa_{II} + \omega_{II} t), \\ y_2 &= r_{2I} k_I \sin(\kappa_I + \omega_I t) + r_{2II} k_{II} \sin(\kappa_{II} + \omega_{II} t), \end{aligned}$$

oder es muß je nach den Grenzbedingungen an Stelle eines  $\sin$  oder beider  $\sin$  der  $\cos$  treten. An Stelle von (6) tritt die Gleichung

$$(6B) \quad \omega^2 = \frac{1}{2A_0} (-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_0A_4})$$

*IC*  $A_0A_4$  haben ungleiches Vorzeichen. Dann ist in (6) ein Paar  $\omega$  reell, ein Paar imaginär. Die allgemeine Lösung lautet

$$(8IC) \quad \begin{aligned} y_1 &= r_{1I} k_I \sin(\kappa_I + \omega_I t) + r_{1II} k_{II} \sin(\kappa_{II} + \omega_{II} t), \\ y_2 &= r_{2I} k_I \sin(\kappa_I + \omega_I t) + r_{2II} k_{II} \sin(\kappa_{II} + \omega_{II} t). \end{aligned}$$

Die Bedingung  $A_2^2 - 4A_0A_4 > 0$  kann man auch durch die folgende ersetzen. Es muß  $a_{12} = a_{21}$  und  $c_{12} = c_{21}$  sein und der Ausdruck [vgl. § 6 (7)]

$$2E(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

muß eine positive Form sein, d. h. er darf für keinen Wert von  $x$  und  $y$  Null oder negativ werden. Der Beweis ist genau so, wie er in III, § 3 für 3 Differentialgleichungen durchgeführt wird. Die Bedingungen, daß  $E$  eine positive Form ist, sind:

$$\begin{aligned} a_{11} &> 0, & a_{22} &> 0, \\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 &> 0 \end{aligned}$$

$$II \quad A_2^2 - 4A_0A_4 < 0$$

Statt (1) müssen wir hier den folgenden Ansatz machen

$$(1II) \quad \begin{aligned} y_1 &= r_1 k e^{n t}, \\ y_2 &= r_2 k e^{n t} \end{aligned}$$

Für die weiteren Rechnungen vgl. § 8, in dessen Differentialgleichungen die unseren als Spezialfall enthalten sind für

$b_{11} = b_{12} = b_{21} = b_{22} = 0$  In der allgemeinen Lösung § 8 (8A) ist daher  $\beta_I = -\beta_{II}$  und  $\omega_I = \omega_{II}$  zu setzen

Ich will nun die Gl (6) noch geometrisch diskutieren Ich führe folgende Abkürzungen ein (vgl (4) in § 2 und 3)

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{c_{11}}{a_{11}} = \gamma_I^2, & \frac{c_{22}}{a_{22}} = \gamma_{II}^2, & \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} = a, & \frac{c_{12}c_{21}}{a_{11}a_{22}} = c, \\ & & \frac{a_{21}c_{12}}{a_{11}a_{22}} + \frac{a_{12}c_{21}}{a_{11}a_{22}} = b. \end{cases}$$

Dann ist nach (6)

$$(10) \quad \omega^2 = \frac{1}{2(1-a)} \{ \gamma_I^2 + \gamma_{II}^2 - b \pm \sqrt{(\gamma_I^2 + \gamma_{II}^2 - b)^2 - 4(1-a)(\gamma_I^2 \gamma_{II}^2 - c)} \}$$

Es ist nun von besonderem Interesse, in welcher Weise  $\omega^2$  abhängt von den Frequenzen  $\gamma_I^2$  und  $\gamma_{II}^2$ , die vor der Verkoppe-

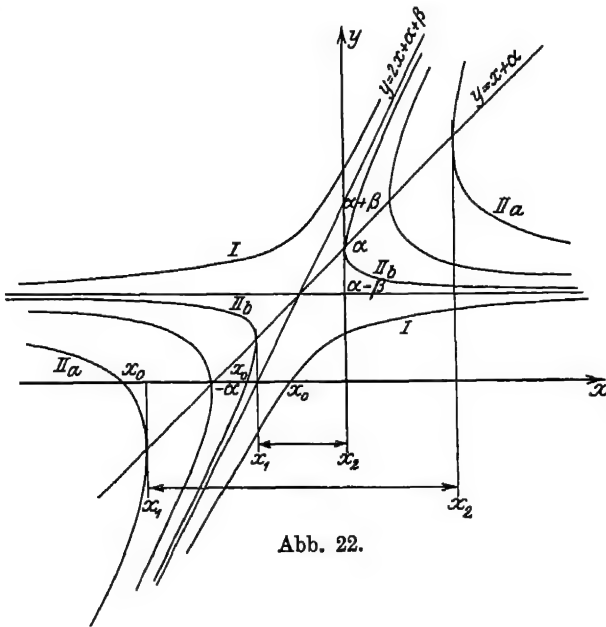


Abb. 22.

lung bestanden Da  $\gamma_I^2$  und  $\gamma_{II}^2$  in (10) symmetrisch vorkommen, genügt es, die eine Abhängigkeit zu betrachten Ich setze

$$(11) \quad \begin{aligned} 2(1-a)\omega^2 &= y, \\ \gamma_{II}^2 &= x \end{aligned}$$

Dann wird (10)

$$(12) \quad y = x + \alpha \pm \sqrt{x^2 + 2\beta x + \gamma},$$

$$(13) \quad \begin{cases} \alpha = \gamma_I^2 - b, \\ \beta = 2a\gamma_I^2 - \gamma_I^2 - b, \\ \gamma = (\gamma_I^2 - b)^2 + 4(1-a)c \end{cases}$$

(12) stellt eine Hyperbel dar mit den beiden Aymptoten

$$y = 2x + \alpha + \beta,$$

$$y = \alpha - \beta$$

Zu den verschiedenen  $\gamma$  gehören also verschiedene Hyperbeln, die alle dieselben Asymptoten besitzen. Der Schnittpunkt der Hyperbel mit der  $x$ -Achse ist

$$x_0 = \frac{\gamma - \alpha^2}{2(\alpha - \beta)}.$$

Es sind 2 Fälle zu unterscheiden

*I*  $\gamma \geq \beta^2$ . Es gehören zu jedem  $x$  2 reelle  $y$ . Ist  $x < x_0$ , so ist ein  $y$  pos und ein  $y$  neg. Ist  $x > x_0$ , so sind beide  $y$  pos

*II*  $\gamma < \beta^2$ . Es gibt ein Intervall  $x_1$  bis  $x_2$ , in dem keine reellen  $y$  existieren. Die Grenzen dieses Intervalles sind

$$\left. \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \gamma}$$

Ist  $x < x_0$ , so ist wie in *I* ein  $y$  pos. und ein  $y$  neg. Ist  $x_0 < x < x_1$ , so sind a) beide  $y$  neg., wenn  $x_0$  und  $x_1 < -\alpha$  und b) beide  $y$  pos., wenn  $x_0$  und  $x_1 > -\alpha$ . Ist  $x > x_2$ , so sind beide  $y$  pos. Die Abb. 22 ist gezeichnet für den Fall  $\alpha > 0, \beta < \alpha^1$

## § 5. Geometrische Deutung der Resultate.

In § 4 (8 I A) haben wir Schwingungen vor uns, die sich aus 2 einfachen Schwingungen zusammensetzen, also von folgender Gestalt sind

$$(1) \quad y = y_I + y_{II} = k_I \sin(\kappa_I + \omega_I t) + k_{II} \sin(\kappa_{II} + \omega_{II} t)$$

Man kann sie in ähnlicher Weise geometrisch deuten wie die einfachen Sinusschwingungen in I, § 1. Ich betrachte also den Vektor (Abb. 23)

$$(2) \quad z = z_I + z_{II} = k_I e^{i(\kappa_I + \omega_I t)} + k_{II} e^{i(\kappa_{II} + \omega_{II} t)}$$

<sup>1)</sup> Vergleiche die Hyperbel in der Abb. 4 der Wienschen Arbeit.



$z_I$  ist ein Vektor, der sich um den Koordinatenanfangspunkt mit der Geschwindigkeit  $\omega_I$  dreht. Der Vektor  $z_{II}$  führt nun 2 Bewegungen aus. 1. dreht er sich um seinen Anfangspunkt mit der Geschwindigkeit  $\omega_{II}$  und 2. bewegt sich sein Anfangspunkt auf dem Kreise um  $O$  vom Radius  $k_I$ . Der Endpunkt von  $z$  beschreibt dabei eine Epi- oder Hypozykloide, je nachdem  $\omega_I$  und  $\omega_{II}$  gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben. Man kann nun so fortfahren und zu den 2 Schwingungen noch mehr hinzufügen und erhält dann Zykloiden höherer Ordnung. Man sieht hier einen Zusammenhang zwischen der Darstellung periodischer Bewegungen von Himmelskörpern durch Zykloiden nach Ptolemäus und der Darstellung periodischer Funktionen durch trigonometrische Reihen nach Fourier

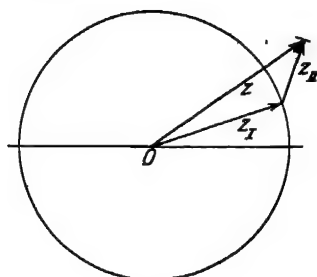


Abb 23

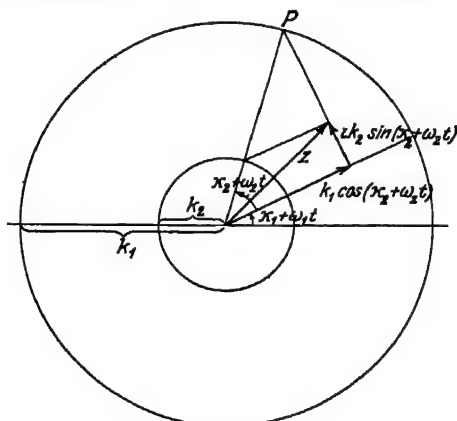


Abb 24.

Man kann die Gleichung (2) aber auch noch auf andere Weise interpretieren.

Ich führe neue Buchstaben ein

$$(3) \quad \begin{aligned} k_1 &= k_I + k_{II}, & \kappa_1 &= \frac{\kappa_I + \kappa_{II}}{2}, & \omega_1 &= \frac{\omega_I + \omega_{II}}{2}, \\ k_2 &= k_I - k_{II}, & \kappa_2 &= \frac{\kappa_I - \kappa_{II}}{2}, & \omega_2 &= \frac{\omega_I - \omega_{II}}{2}, \end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} \kappa_I &= \kappa_1 + \kappa_2, & \omega_I &= \omega_1 + \omega_2, \\ \kappa_{II} &= \kappa_1 - \kappa_2, & \omega_{II} &= \omega_1 - \omega_2. \end{aligned}$$

Die Gl (2) kann ich dann schreiben

$$(5) \quad \begin{aligned} z &= [k_I e^{i(\kappa_2 + \omega_2 t)} + k_{II} e^{-i(\kappa_2 + \omega_2 t)}] e^{i(\kappa_1 + \omega_1 t)}, \\ z &= [k_1 \cos(\kappa_2 + \omega_2 t) + i k_2 \sin(\kappa_2 + \omega_2 t)] e^{i(\kappa_1 + \omega_1 t)} \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der Klammer stellt eine Ellipse mit den Achsen  $k_1$  und  $k_2$  dar. Der Endpunkt von  $z$  durchläuft die Ellipse derartig, daß der entsprechende Punkt  $P$  auf dem Kreise mit dem Radius  $k_1$  mit der Geschwindigkeit  $\omega_2$  läuft. Ist  $\omega_1 = 0$ , also  $\omega_I$  und  $\omega_{II}$  entgegengesetzt gleich, so hat die große Achse der Ellipse die feste Richtung  $\kappa_1$ . Ist dagegen  $\omega_1 \neq 0$ , so dreht sich die Ellipse mit der Geschwindigkeit  $\omega_1$  (Abb. 24).

Ist z. B.

$$k_I = 2k, \quad \kappa_I = \frac{\pi}{2}, \quad \omega_I = +13\omega,$$

$$k_{II} = k, \quad \kappa_{II} = \frac{\pi}{2}, \quad \omega_{II} = -11\omega,$$

so ist die Gl. (1)

$$y = 2k \cos 13\omega t + k \cos 11\omega t \quad (\text{s. Abb. 25 u. 26})$$

Nach (3) ist

$$k_1 = 3k, \quad \kappa_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \omega_1 = \omega,$$

$$k_2 = k, \quad \kappa_2 = 0, \quad \omega_2 = 12\omega$$

Die Gl. (5) wird daher

$$z = (3k \cos 12\omega t + i k \sin 12\omega t) e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right)}.$$

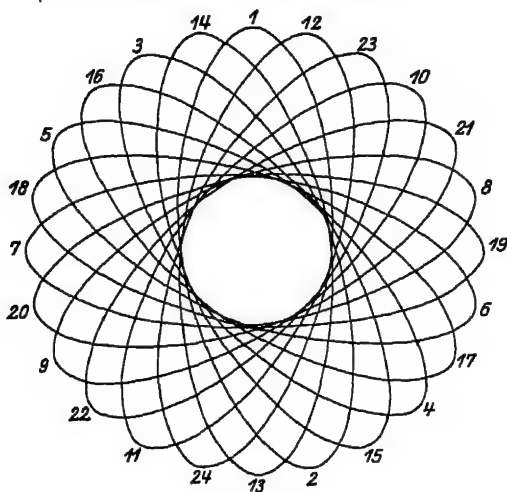


Abb. 27.

Der Endpunkt von  $z$  beschreibt dabei die Kurve Abb. 27.

Die Abb. (26) stellt sogenannte Schwebungen dar, die um so ausgeprägter sind, je weniger  $k_I$  und  $k_{II}$  voneinander verschieden

sind. Ist  $k_I = k_{II} = k$ , so entartet die Ellipse von (5) zu einer Strecke und (5) geht über in:

$$(6) \quad z = 2k \cos(\kappa_2 + \omega_2 t) e^{i(\kappa_1 + \omega_1 t)}$$

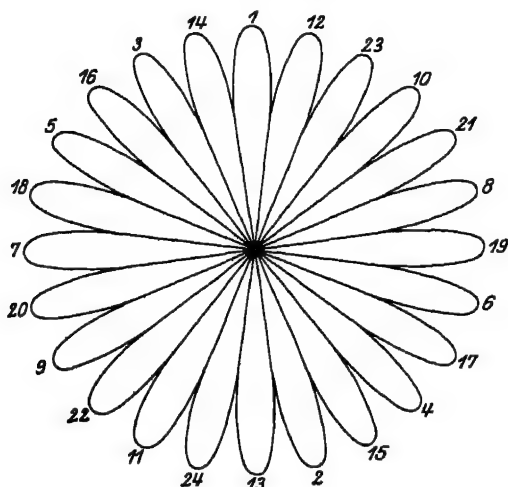


Abb. 29.

Daraus folgt eine neue Darstellung der Schwingung (1) nämlich

$$(7) \quad y = y_1 y_2 = 2k \cos(\kappa_2 + \omega_2 t) \sin(\kappa_1 + \omega_1 t).$$

Im obigen Falle ist.

$$(1') \quad y = k(\cos 13 \omega t + \cos 11 \omega t) \quad \text{Siehe Abb 28 u. 29,}$$

$$(6') \quad z = 2k \cos 12 \omega t e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right)}. \quad \text{Siehe Abb 30,}$$

$$(7') \quad y = 2k \cos 12 \omega t \cos \omega t. \quad \text{Siehe Abb 29}$$

In § 2 und 3 (15) hatten wir außer einer Schwingung der Gestalt (1') noch eine Schwingung

$$(1'') \quad y = k(-\cos 13 \omega t + \cos 11 \omega t)$$

Es ist daher

$$\kappa_I = \frac{3\pi}{2}, \quad \kappa_1 = \pi,$$

$$\kappa_{II} = \frac{\pi}{2}, \quad \kappa_2 = \frac{\pi}{2},$$

$$(7'') \quad y = y_1 y_2 = 2k \sin 12 \omega t \sin \omega t, \quad \text{siehe Abb 31}$$

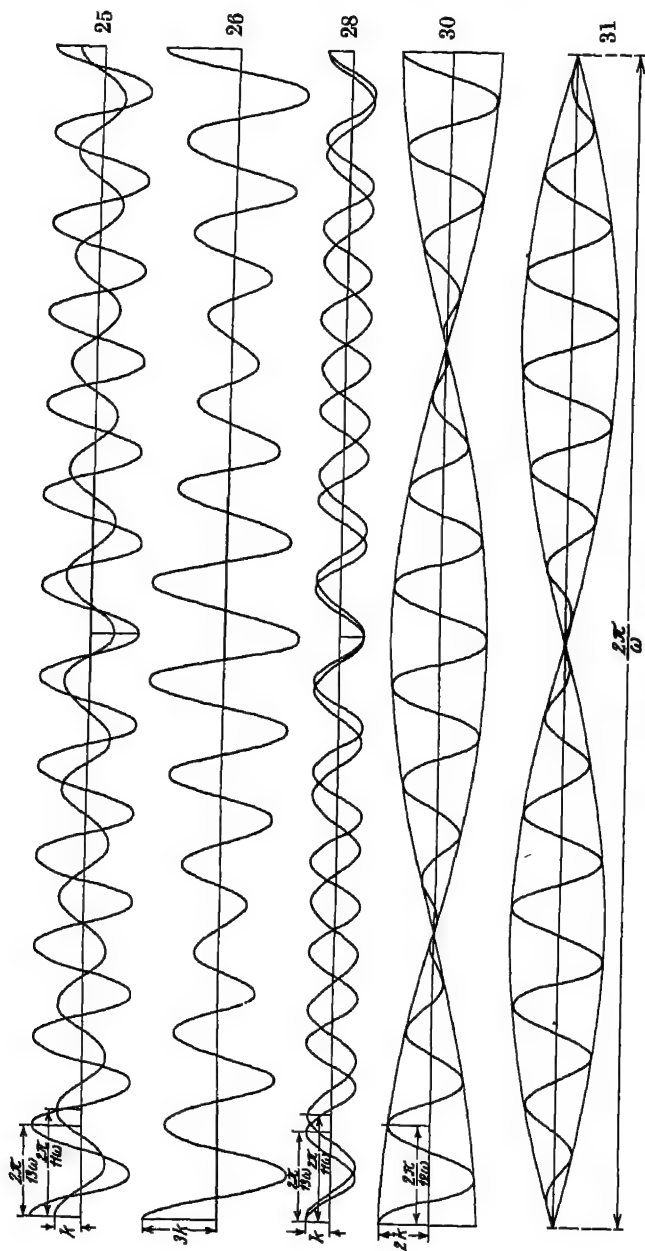


Abb 25, 26, 28, 30, 31.

Schwingungen (1') und (1'') haben nach Abb 29 und 31 die Eigentümlichkeit, daß die eine immer dort ihre größten Werte annimmt, wo die andere die kleinsten hat und umgekehrt.

Man kann also nach (1) und (7) die Summe zweier Schwingungen  $y_I + y_{II}$  ersetzen durch das Produkt der Schwingungen  $y_1 y_2$ . Manchmal ist auch der umgekehrte Weg praktisch, das Produkt

$$y = y_1 y_2 = k_1 \sin(\kappa_1 + \omega_1 t) k_2 \sin(\kappa_2 + \omega_2 t)$$

durch eine Summe zu ersetzen. Zu diesem Zweck schreibe ich die obige Gleichung folgendermaßen:

$$y = k_1 \sin(\kappa_1 + \omega_1 t) k_2 \cos\left(\kappa_2 - \frac{\pi}{2} + \omega_2 t\right)$$

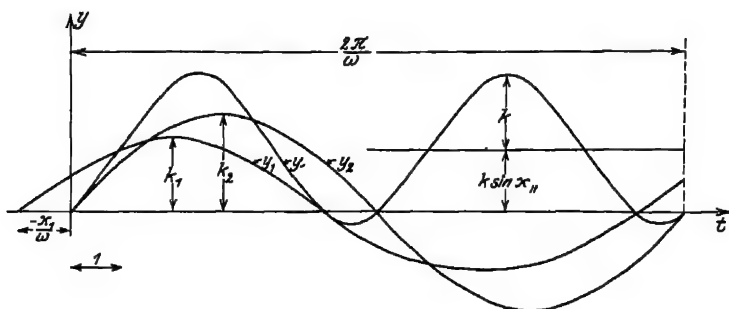


Abb 32.

Dann ist nach (4):

$$y = y_I + y_{II} = k [\sin(\kappa_I + \omega_I t) + \sin(\kappa_{II} + \omega_{II} t)],$$

$$k = \frac{k_1 k_2}{2}, \quad \kappa_I = \kappa_1 + \kappa_2 - \frac{\pi}{2}, \quad \omega_I = \omega_1 + \omega_2,$$

$$\kappa_{II} = \kappa_1 - \kappa_2 + \frac{\pi}{2}, \quad \omega_{II} = \omega_1 - \omega_2.$$

Für die Anwendungen ist besonders wichtig das Integral  $\int y_1 y_2 dt$ . Schreibe ich nun hierfür  $\int y_I dt + \int y_{II} dt$ , so erkennt man sofort, daß im allgemeinen das Integral Null sein wird. Eine Ausnahme bildet nur der Fall  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , denn dann ist

$$\omega_I = 2\omega,$$

$$\omega_{II} = 0,$$

$$\int_0^{\tau} y_1 y_2 dt = \int_0^{\tau} y_{II} dt = \int_0^{\tau} k \sin \kappa_{II} dt = \frac{\tau}{2} k_1 k_2 \cos(\kappa_1 - \kappa_2).$$

Das Integral verschwindet also nur dann, wenn  $\alpha_1 - \alpha_2 = 90^\circ$ .

$$\text{Ist z. B.} \quad k_1 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_1 = 30^\circ,$$

$$k_2 = 2, \quad \alpha_2 = 0^\circ,$$

$$\text{so ist} \quad k = \frac{3}{2}, \quad \alpha_I = -60^\circ,$$

$$\alpha_{II} = 120^\circ \quad \text{Siehe Abb. 32.}$$

Fließen z. B. in der Spule eines Dynamometers 2 Wechselströme

$$J_1 = |J_1| \sin(\alpha_1 + \omega_1 t) \quad \text{und} \quad J_2 = |J_2| \sin(\alpha_2 + \omega_2 t),$$

so ist die Ablenkung proportional

$$\int J_1 \cdot J_2 dt$$

Haben also diese beiden Wechselströme verschiedene Frequenz, so findet keine Ablenkung statt.

Haben sie gleiche Frequenz, so ist

$$\int_0^{\tau} J_1 J_2 dt = \frac{\tau}{2} |J_1| |J_2| \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

## § 6. Die Lagrangeschen Gleichungen: 1. Form.

Es sei  $E$  eine Funktion von  $y_1, y_2$  und  $V$  eine Funktion von  $y_1, y_2$ . Ich entwickle beide Funktionen nach Potenzen und breche die Entwicklung nach den quadratischen Gliedern ab

$$(1) \quad \begin{cases} E = E_0 + \left(\frac{\partial E}{\partial y_1}\right)_0 y_1 + \left(\frac{\partial E}{\partial y_2}\right)_0 y_2 \\ \quad + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1^2}\right)_0 y_1^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial y_2}\right)_0 y_1 y_2 + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_2^2}\right)_0 y_2^2 \right], \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} V = V_0 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_0 y_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)_0 y_2 \\ \quad + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}\right)_0 y_1^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2}\right)_0 y_1 y_2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}\right)_0 y_2^2 \right] \end{cases}$$

Nun bilde ich die Gleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial V}{\partial y_1} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E}{\partial y_2} \right) + \frac{\partial V}{\partial y_2} = 0 \end{cases}$$

Es ergibt sich.

$$1) \quad \begin{cases} \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_1^2} \right)_0 \ddot{y}_1 + \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial y_2} \right)_0 \ddot{y}_2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y_1} \right)_0 + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} \right)_0 y_1 + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2} \right)_0 y_2 = 0, \\ \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial y_2} \right)_0 \ddot{y}_1 + \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_2^2} \right)_0 \ddot{y}_2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y_2} \right)_0 + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2} \right)_0 y_1 + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2} \right)_0 y_2 = 0. \end{cases}$$

Vergleiche ich diese Gleichungen mit den Differentialgleichungen § 4, so ist

$$(5) \quad \left( \frac{\partial V}{\partial y_1} \right)_0 = \left( \frac{\partial V}{\partial y_2} \right)_0 = 0$$

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 E}{\partial y_1^2} = a_{11}, & \frac{\partial^2 E}{\partial y_2^2} = a_{22}, & \frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial y_2} = a_{12} = a_{21}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} = c_{11}, & \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2} = c_{22}, & \frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2} = c_{12} = c_{21}. \end{cases}$$

Ist also  $a_{12} = a_{21}$  und  $c_{12} = c_{21}$ , so lassen sich die Funktionen

$$(7) \quad \begin{aligned} E &= a_{11} y_1^2 + 2 a_{12} y_1 y_2 + a_{22} y_2^2, \\ V &= c_{11} y_1^2 + 2 c_{12} y_1 y_2 + c_{22} y_2^2, \end{aligned}$$

aufstellen und damit die Differentialgleichung § 4 auf die obige Form (3) bringen.

Bei mechanischen Schwingungen ist  $E$  die kinetische Energie,  $V$  das Potential und die Gl (3) sind die Lagrangeschen Gleichungen (Hamel El M Nr 329).

1 Es sei bei dem Doppelpendel der Abb 33  $T_1$  das Tragheitsmoment des 1 Gliedes um den Drehpunkt  $D_1$  und  $T_2$  das Tragheitsmoment des 2 Gliedes um den Drehpunkt  $D_2$ .  $m_1$  und  $m_2$  seien die Massen der beiden Glieder. Dann ist

$$(8) \quad 2E = (T_1 + m_2 b_2^2) \dot{\varphi}_1^2 + 2(a_2 b_2 m_2 \cos \beta) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + T_2 \dot{\varphi}_2^2,$$

$$(9) \quad V = -m_1 g a_1 \cos(\alpha + \varphi_1) - m_2 g [b_2 \cos(\beta + \varphi_1) + a_2 \cos \varphi_2].$$

Nach (1) und (2) ist daher

$$(10) \quad 2E = (T_1 + m_2 b_2^2) \dot{\varphi}_1^2 + 2(a_2 b_2 m_2 \cos \beta) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + T_2 \dot{\varphi}_2^2,$$

$$(11) \quad \begin{aligned} V &= -(m_1 a_1 \cos \alpha + m_2 b_2 \cos \beta + m_2 a_2) g \\ &\quad + (m_1 a_1 \sin \alpha + m_2 b_2 \sin \beta) g \varphi_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} [(m_1 a_1 \cos \alpha + m_2 b_2 \cos \beta) g \varphi_1^2 + m_2 a_2 g \varphi_2^2] \end{aligned}$$

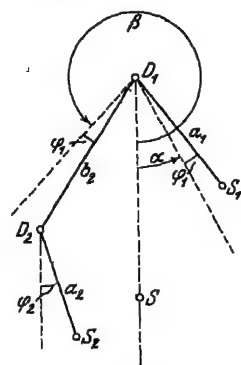


Abb. 33.

Soll die Lage  $\alpha \beta$  die Ruhelage sein, so muß der 2. Sum. von  $V$  verschwinden, denn

$$x_S = \frac{m_1 a_1 \sin \alpha + m_2 b_2 \sin \beta}{m_1 + m_2}$$

ist die  $x$ -Koordinate des gemeinsamen Schwerpunktes  $S$  der Ruhelage muß aber  $x_S = 0$  sein. Damit sind die Gl. (8) erfüllt. Rechnet man ferner die potentielle Energie nicht von durch  $D_1$ , sondern von der durch  $S$  gehenden Horizontalen, so verschwindet in (11) auch das 1. Glied. Dieses Glied ist die Gl. (6) ja auch ohne Einfluß. Ich kann daher schreiben

$$(12) \quad 2V = (m_1 a_1 \cos \alpha + m_2 b_2 \cos \beta) g \varphi_1^2 + m_2 a_2 g \varphi_2^2.$$

Liegen  $D_1, D_2, S_1$  in einer Geraden, so ist  $\alpha = \beta = 0$  die Gl. (10) und (12) werden

$$(10a) \quad 2E = (T_1 + m_2 b_2^2) \dot{\varphi}_1^2 + 2a_2 b_2 m_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + T_2 \dot{\varphi}_2^2,$$

$$(12a) \quad 2V = (m_1 a_1 + m_2 b_2) g \varphi_1^2 + m_2 a_2 g \varphi_2^2.$$

Dreht sich speziell das 1. Glied um seinen Schwerpunkt ( $a_1$  und ist  $b_2 = a_2 = a$ ,  $T_1 + m_2 b_2^2 = T_2$ , so ist

$$(10b) \quad 2E = T_2 \dot{\varphi}_1^2 + 2a^2 m_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + T_2 \dot{\varphi}_2^2,$$

$$(12b) \quad 2V = m_2 a g \varphi_1^2 + m_2 a g \varphi_2^2.$$

Wir haben dann den Spezialfall § 2, b) (Hamel. El. M. Nr.

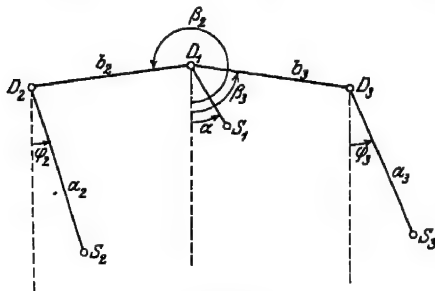


Abb. 34

2. Ich will nun noch 2 Beispiele anführen, we zeigen soll, daß die Verknüpfung zweier Schwingungen auch eine derartige sein kann, daß die Ausdrücke (7) 1 einfache physikalische Bedeutung haben. Hängt nämlich an dem 1. Körper ein 3. wie etwa bei der W, so ist ganz entsprechend (10) und (12) (Abb. 34)

$$(13) \quad \begin{cases} 2E = (T_1 + m_2 b_2^2 + m_3 b_3^2) \dot{\varphi}_1^2 + T_2 \dot{\varphi}_2^2 + T_3 \dot{\varphi}_3^2 \\ \quad + 2(a_2 b_2 m_2 \cos \beta_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + 2(a_3 b_3 m_3 \cos \beta_3) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3, \\ 2V = (m_1 a_1 \cos \alpha + m_2 b_2 \cos \beta_2 + m_3 b_3 \cos \beta_3) g \varphi_1^2 \\ \quad + m_2 a_2 g \varphi_2^2 + m_3 a_3 g \varphi_3^2. \end{cases}$$



Wir bekommen dann 3 Gleichungen von der Form:

$$(14) \quad \begin{cases} a_{11} \ddot{\varphi}_1 + c_{11} \varphi_1 + a_{12} \ddot{\varphi}_2 + a_{13} \ddot{\varphi}_3 = 0, \\ a_{21} \ddot{\varphi}_1 + a_{22} \ddot{\varphi}_2 + c_{22} \varphi_2 = 0. \\ a_{31} \ddot{\varphi}_1 + a_{33} \ddot{\varphi}_3 + c_{33} \varphi_3 = 0. \end{cases}$$

Hierbei ist:

$$(15) \quad \begin{aligned} a_{11} &= T_1 + m_2 b_2^2 + m_3 b_3^2, & a_{12} &= a_2 b_2 m_2 \cos \beta_2, \\ a_{22} &= T_2, & a_{13} &= a_3 b_3 m_3 \cos \beta_3, \\ a_{33} &= T_3, \\ c_{11} &= (m_1 a_1 \cos \alpha + m_2 b_2 \cos \beta_2 + m_3 b_3 \cos \beta_3) g, \\ (16) \quad c_{22} &= m_2 a_2 g, \\ c_{33} &= m_3 a_3 g. \end{aligned}$$

Setze ich

$$(17) \quad m_1 a_1 \cos \alpha + m_2 b_2 \cos \beta_2 + m_3 b_3 \cos \beta_3 = y_0^* (m_1 + m_2 + m_3),$$

so ist  $y_0^*$  die Ordinate des Schwerpunktes der ganzen Kette, wenn ich mir die Gewichte  $m_2 g$  und  $m_3 g$  in  $D_2$  und  $D_3$  konzentriert denke. Ist  $y_0^* = 0$  (astatisches Gleichgewicht), so ist nach (16) auch  $c_{11} = 0$ . Die Gleichungen (14) lauten dann

$$(18) \quad \begin{aligned} a_{11} \ddot{\varphi}_1 + a_{12} \ddot{\varphi}_2 + a_{13} \ddot{\varphi}_3 &= 0, \\ a_{21} \ddot{\varphi}_1 + a_{22} \ddot{\varphi}_2 + c_{22} \varphi_2 &= 0, \\ a_{31} \ddot{\varphi}_1 + a_{33} \ddot{\varphi}_3 + c_{33} \varphi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen kann man  $\ddot{\varphi}_1$  eliminieren

$$(19) \quad \begin{aligned} (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) \ddot{\varphi}_2 + a_{11} c_{23} \varphi_2 - a_{12} a_{13} \ddot{\varphi}_3 &= 0, \\ (a_{11} a_{33} - a_{13}^2) \ddot{\varphi}_3 + a_{11} c_{33} \varphi_3 - a_{12} a_{13} \ddot{\varphi}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Das ursprüngliche Problem von 3 Freiheitsgraden ist also auf 2 Freiheitsgrade zurückgeführt, und zwar ist

$$(20) \quad \begin{aligned} \hat{a}_{11} &= a_{11} a_{22} - a_{12}^2, & \hat{c}_{11} &= a_{11} c_{22}, \\ \hat{a}_{22} &= a_{11} a_{33} - a_{13}^2, & \hat{c}_{22} &= a_{11} c_{33}, \\ \hat{a}_{12} &= \hat{a}_{21} = -a_{12} a_{13} \end{aligned}$$

Auch hier kann man, da  $\hat{a}_{12} = \hat{a}_{21}$ , die Ausdrücke (7) bilden, sie haben aber keine einfache physikalische Bedeutung

Ist die Gelenkkette symmetrisch, d. h. ist  $a_2 = a_3$ ,  $b_2 = b_3$ ,  $m_2 = m_3$ ,  $T_2 = T_3$ ,  $\beta_2 = -\beta_3$ , so ist

$$\begin{aligned}\hat{a}_{11} &= \hat{a}_{22} = (T_1 + 2 m_2 b_2^2) T_2 - a_2^2 b_2^2 m_2^2 \cos^2 \beta_2, \\ \hat{c}_{11} &= \hat{c}_{22} = (T_1 + 2 m_2 b_2^2) m_2 a_2 g, \\ \hat{a}_{12} &= \hat{a}_{21} = - (a_2 b_2 m_2 \cos \beta_2)^2.\end{aligned}$$

Wir haben dann wieder den Spezialfall § 2b

Vgl Felgentrager „Theorie, Konstruktion und Gebrauch der feineren Hebelwage“ (Teubner 1907), Pflieger-Haertel. „Über die kleinen Schwingungen einer dreieckigen ebenen Gelenkkette, zugleich ein Beitrag zur Theorie der einfachen Hebelwage“ (Diss Jena 1914)

3) Gleichungen von der Form § 2 erhält man ferner, wenn ein Stab, dessen Masse vernachlässigt werden kann, von 2 Massen  $m_1$  und  $m_2$  belastet wird. Es ist dabei

$$\begin{aligned}c_{11} &= c_{22} = \text{Elastizitätsmodul} \cdot \text{Trägheitsmoment des Stab-} \\ &\quad \text{querschnittes,} \\ a_{11} &= \kappa_{11} m_1, \quad a_{12} = \kappa_{12} m_2, \quad a_{21} = \kappa_{21} m_1, \quad a_{22} = \kappa_{22} m_2\end{aligned}$$

Die  $\kappa$  heißen Einflußzahlen. Sie hängen von den Auflagenbedingungen ab. (Lorenz, T. Ph. IV, 192.)

4) Ein Problem, bei dem Kraft- und Beschleunigungskopplung gleichzeitig vorliegen, ist der Schlingertank nach Frahm (Hort, T Schw § 121)

$$\begin{aligned}\S 7. \quad a_{11} \ddot{y}_1 + c_{11} \dot{y}_1 + b_{12} \dot{y}_2 &= 0, \\ b_{21} \dot{y}_1 + a_{22} \dot{y}_2 + c_{22} y_2 &= 0.\end{aligned}$$

Diese Differentialgleichungen sind die Gleichungen der Geschwindigkeitskopplung. Es ist hier am besten, die Lösung in komplexer Form anzusetzen

$$\begin{aligned}(1) \quad y_1 &= r_1 k e^{i(\kappa + \omega t)}, \\ y_2 &= r_2 k e^{i(\kappa + \omega t)}\end{aligned}$$

Es ist dann sowohl der reelle Bestandteil von (1) als auch der imaginäre eine Lösung. Setze ich (1) in unsere Differentialgleichung ein, so ist.

$$\begin{aligned}(2) \quad (-a_{11} \omega^2 + c_{11}) r_1 + b_{12} i \omega r_2 &= 0, \\ b_{21} i \omega r_1 + (-a_{22} \omega^2 + c_{22}) r_2 &= 0,\end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{vmatrix} -a_{11} \omega^2 + c_{11} & b_{12} i \omega \\ b_{21} i \omega & -a_{22} \omega^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

$$(3a) \quad a_{11} a_{22} \omega^4 - (a_{11} c_{22} + a_{22} c_{11} - b_{12} b_{21}) \omega^2 + c_{11} c_{22} = 0$$

Ich führe folgende Abkürzungen ein.

$$(4) \quad \frac{c_{11}}{a_{11}} = \gamma_I^2, \quad \frac{c_{22}}{a_{22}} = \gamma_{II}^2, \quad \frac{b_{12} b_{21}}{a_{11} a_{22}} = b.$$

Dann kann ich (3a) schreiben

$$(5) \quad \omega^4 - (\gamma_I^2 + \gamma_{II}^2 - b) \omega^2 + \gamma_I^2 \gamma_{II}^2 = 0,$$

aufgelöst.

$$(6) \quad \omega^2 = \frac{1}{2} (\gamma_I^2 + \gamma_{II}^2 - b) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)^2 - 2b(\gamma_I^2 + \gamma_{II}^2) + b^2}$$

Aus der 1. Gl. (2) folgt nun:

$$(7) \quad \begin{aligned} r_1 &= -b_{12} \omega, \\ r_2 &= -a_{11} \omega^2 + c_{11}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung ist.

$$(8) \quad \begin{aligned} y_1 &= r_{1I} k_I e^{i(\kappa_I + \omega_I t)} + r_{1II} k_{II} e^{i(\kappa_{II} + \omega_{II} t)}, \\ y_2 &= r_{2I} k_I e^{i(\kappa_I + \omega_I t)} + r_{2II} k_{II} e^{i(\kappa_{II} + \omega_{II} t)}. \end{aligned}$$

Ich betrachte nun 3 Spezialfälle.

a) Ist die Kopplung schwach ( $b$  klein), so ist in (6)

$$(9) \quad \begin{aligned} \sqrt{(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)^2 - 2b(\gamma_I^2 + \gamma_{II}^2) + b^2} &= \gamma_I^2 - \gamma_{II}^2 - b \frac{\gamma_I^2 + \gamma_{II}^2}{\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2}, \\ \left\{ \begin{aligned} \omega_I &= \sqrt{\gamma_I^2 - b \frac{\gamma_I^2}{\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2}} = \gamma_I - \frac{b \gamma_I}{2(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)}, \\ \omega_{II} &= \sqrt{\gamma_{II}^2 + b \frac{\gamma_{II}^2}{\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2}} = \gamma_{II} + \frac{b \gamma_{II}}{2(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

b)  $\gamma_I^2 = \gamma_{II}^2 = \gamma^2$

$$(10) \quad \omega^2 = \gamma^2 - \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4b\gamma^2 + b^2}$$

oder bei schwacher Kopplung ( $b_{12}$  klein!)

$$(10a) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega^2 &= \gamma^2 \pm \gamma \sqrt{-b}, \\ \omega &= \gamma \pm \frac{1}{2} \sqrt{-b} \end{aligned} \right.$$

Ist speziell  $b_{12} = -b_{21}$  und ist  $a_{11} = a_{22} = a$ , so ist

$$(10b) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega^2 &= \gamma^2 \pm \gamma \frac{b_{21}}{a}, \\ \omega &= \gamma \pm \frac{1}{2} \frac{b_{21}}{a} \end{aligned} \right.$$

Nach (7) ist daher in erster Annäherung:

$$(11) \quad \begin{aligned} r_{1I} &= r_{1II} = b_{21} \gamma, \\ r_{2I} &= -\gamma b_{21} \quad r_{2II} = +\gamma b_{21}. \end{aligned}$$

Es ist daher nach (8), wenn ich den allen  $r$  gemeinsamen Faktor  $\gamma b_{21}$  in die willkürlichen Konstanten  $k$  hineinnehme und dann zu reellen Größen übergehe

$$y_1 = k_I \sin(\kappa_I + \omega_I t) + k_{II} \sin(\kappa_{II} + \omega_{II} t),$$

$$y_2 = k_I \cos(\kappa_I + \omega_I t) - k_{II} \cos(\kappa_{II} + \omega_{II} t)$$

$$c) \gamma_{II}^2 = 0 \quad (c_{22} = 0).$$

$$\begin{aligned} \text{Aus (6) folgt dann} \quad \omega_I^2 &= \gamma_I^2 - b, \\ \omega_{II}^2 &= 0 \end{aligned}$$

Aus (8) folgt dann, da nach (4)  $-a_{11}\omega_I^2 + c_{11} = a_{11}b$  ist,  
 $y_1 = b_{12}\omega_I k_I \sin(\kappa_I + \omega_I t) = b_{12}\omega_I (K_I \cos \omega_I t + L_I \sin \omega_I t),$   
 $y_2 = a_{11}b k_I \cos(\kappa_I + \omega_I t) + k_{II} = a_{11}b (L_I \cos \omega_I t - K_I \sin \omega_I t) + K_{II}$

Die Konstanten bestimmen sich aus dem Anfangszustand folgendermaßen:

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{y_{10}}{b_{12}\omega_I}, & L_I &= \frac{\dot{y}_{10}}{b_{12}\omega_I^2}, \\ K_{II} &= y_{20} - \frac{b_{21}\dot{y}_{10}}{a_{22}\omega_I^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \S 8. \quad a_{11}\dot{y}_1 + b_{11}\dot{y}_1 + c_{11}y_1 + a_{12}\dot{y}_2 + b_{12}\dot{y}_2 + c_{12}y_2 &= 0, \\ a_{21}\ddot{y}_1 + b_{21}\dot{y}_1 + c_{21}y_1 + a_{22}\ddot{y}_2 + b_{22}\dot{y}_2 + c_{22}y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Durch den Ansatz  $y_1 = r_1 k e^{nt},$

$$(1) \quad y_2 = r_2 k e^{nt},$$

gehen die Differentialgleichungen über in

$$(2) \quad \begin{aligned} f_{11}(n)r_1 + f_{12}(n)r_2 &= 0, \\ f_{21}(n)r_1 + f_{22}(n)r_2 &= 0, \end{aligned}$$

wobei

$$(2a) \quad f(n) = an^2 + bn + c$$

Die homogenen Gl (2) sind nur lösbar, falls.

$$(3) \quad \begin{vmatrix} f_{11}(n) & f_{12}(n) \\ f_{21}(n) & f_{22}(n) \end{vmatrix} = 0.$$

Setze ich (2a) in (3) ein und führe die folgenden Abkürzungen ein:

$$(4) \quad \begin{aligned} A_0 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ A_1 &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ A_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & c_{12} \\ a_{21} & c_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \\ A_3 &= \begin{vmatrix} b_{11} & c_{12} \\ b_{21} & c_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & b_{12} \\ c_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \\ A_4 &= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

so kann ich schreiben.

$$(5) \quad A_0 n^4 + A_1 n^3 + A_2 n^2 + A_3 n + A_4 = 0.$$

Aus der 1. Gl (2) ergibt sich dann

$$(7) \quad \begin{aligned} r_1 &= +f_{12}(n), \\ r_2 &= -f_{11}(n) \end{aligned}$$

Bezüglich der Diskussion der Gl (5) vergleiche den folgenden Paragraph

Es sind 3 Fälle zu unterscheiden:

A Alle  $n$  sind komplex Ich setze dann  $n = \beta + i\omega$ . Dann ist nach (7)

$$\begin{aligned} r_1 &= +[a_{12}(\beta^2 - \omega^2) + b_{12}\beta + c_{12}] + i\omega[2a_{12}\beta + b_{12}], \\ r_2 &= -[a_{11}(\beta^2 - \omega^2) + b_{11}\beta + c_{11}] - i\omega[2a_{11}\beta + b_{11}] \end{aligned}$$

Setze ich nun:

$$\begin{aligned} r_1 &= +|r_1|e^{i\varrho_1}, \\ r_2 &= -|r_2|e^{i\varrho_2}, \end{aligned}$$

so ist

$$(7a) \quad \begin{cases} |r_1| = \sqrt{[a_{12}(\beta^2 - \omega^2) + b_{12}\beta + c_{12}]^2 + [2a_{12}\beta + b_{12}]^2 \omega^2}, \\ |r_2| = \sqrt{[a_{11}(\beta^2 - \omega^2) + b_{11}\beta + c_{11}]^2 + [2a_{11}\beta + b_{11}]^2 \omega^2}, \\ \begin{cases} \operatorname{tg} \varrho_1 = \frac{\omega(2a_{12}\beta + b_{12})}{a_{12}(\beta^2 - \omega^2) + b_{12}\beta + c_{12}}, \\ \operatorname{tg} \varrho_2 = \frac{\omega(2a_{11}\beta + b_{11})}{a_{11}(\beta^2 - \omega^2) + b_{11}\beta + c_{11}} \end{cases} \end{cases}$$

Führe ich nun noch statt der komplexen Integrationskonstanten  $k$  von (1) 2 reelle Konstanten  $k$  und  $\kappa$  ein, so lautet die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichungen.

$$(8A) \quad \begin{cases} y_1 = +|r_{1I}| k_I e^{\beta_I t} \sin(\varrho_{1I} + \kappa_I + \omega_I t) \\ \quad + |r_{1II}| k_{II} e^{\beta_{II} t} \sin(\varrho_{1II} + \kappa_{II} + \omega_{II} t), \\ y_2 = -|r_{2I}| k_I e^{\beta_I t} \sin(\varrho_{2I} + \kappa_I + \omega_I t) \\ \quad - |r_{2II}| k_{II} e^{\beta_{II} t} \sin(\varrho_{2II} + \kappa_{II} + \omega_{II} t). \end{cases}$$

B. 2 Wurzeln  $n$  sind komplex, 2 reell Die Lösungen lauten dann

$$(8B) \quad \begin{aligned} y_1 &= r_{1I} k_I e^{n_I t} + r_{1II} k_{II} e^{n_{II} t} + r_1 k e^{\beta t} \sin(\varrho_1 + \kappa + \omega t), \\ y_2 &= r_{2I} k_I e^{n_I t} + r_{2II} k_{II} e^{n_{II} t} + r_2 k e^{\beta t} \sin(\varrho_2 + \kappa + \omega t). \end{aligned}$$

C Alle Wurzeln  $n$  sind reell. Die Lösungen lauten dann

$$(8C) \quad \begin{aligned} y_1 &= r_{1I} k_I e^{n_I t} + r_{1II} k_{II} e^{n_{II} t} + r_{1III} k_{III} e^{n_{III} t} + r_{1IV} k_{IV} e^{n_{IV} t}, \\ y_2 &= r_{2I} k_I e^{n_I t} + r_{2II} k_{II} e^{n_{II} t} + r_{2III} k_{III} e^{n_{III} t} + r_{2IV} k_{IV} e^{n_{IV} t}. \end{aligned}$$

Sind die beiden Wurzeln  $n_I$  und  $n_{II}$  einander gleich, so kann man die beiden Partikularlösungen folgendermaßen zusammenfassen

$$\begin{aligned} y_{1I} + y_{1II} &= r_{1I} (k_I + k_{II}) e^{n_I t}, \\ y_{2I} + y_{2II} &= r_{2I} (k_I + k_{II}) e^{n_I t} \end{aligned}$$

Die beiden Integrationskonstanten  $k_I$  und  $k_{II}$  ziehen sich also in eine Konstante zusammen. Es geht also eine Integrationskonstante verloren. Ich nehme nun zunächst einmal an, die beiden Wurzeln waren wenig voneinander verschieden und schreibe

$$n_{II} = n_I + \varepsilon$$

Nach (7) und dem Taylorschen Satz ist dann

$$r_{1II} = f_{12}(n_{II}) = f_{12}(n_I) + \varepsilon \frac{\partial f_{12}(n_I)}{\partial n_I} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 f_{12}(n_I)}{\partial n_I^2}$$

Die Summe der beiden Partikularlösungen ist dann also

$$\begin{aligned} y_{1I} + y_{1II} &= f_{12}(n_I) k_I e^{n_I t} \\ &+ \left( f_{12}(n_I) + \varepsilon \frac{\partial f_{12}(n_I)}{\partial n_I} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 f_{12}(n_I)}{\partial n_I^2} \right) k_{II} e^{n_I t} e^{\varepsilon t} \end{aligned}$$

Nun entwickle ich auch noch  $e^{\varepsilon t}$

$$y_{1I} + y_{1II} = \left\{ k_I f_{12}(n_I) + k_{II} \left( f_{12}(n_I) + \varepsilon \frac{\partial f_{12}(n_I)}{\partial n_I} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 f_{12}(n_I)}{\partial n_I^2} \right) \right. \\ \left. \left( 1 + \frac{\varepsilon t}{1!} + \frac{\varepsilon^2 t^2}{2!} + \dots \right) \right\} e^{n_I t},$$

$$y_{1I} + y_{1II} = \left\{ (k_I + k_{II}) f_{12}(n_I) + \varepsilon k_{II} \left( \frac{\partial f_{12}(n_I)}{\partial n_I} + f_{12}(n_I) t \right) + \dots \right\} e^{n_I t}.$$

Ich führe neue Konstanten ein

$$k_I + k_{II} = k_1, \\ \varepsilon k_{II} = k_2.$$

Wird nun  $\varepsilon$  unendlich klein, so kann ich mir die willkürlichen Konstanten  $k_I$  und  $k_{II}$  derart unendlich groß denken, daß  $k_1$  und  $k_2$  endlich bleiben. Die obige Reihe bricht dann mit den hingeschriebenen Gliedern ab.

$$y_{1I} + y_{1II} = + \left\{ k_1 f_{12}(n_I) + k_2 \left( \frac{\partial f_{12}(n_I)}{\partial n_I} + f_{12}(n_I) t \right) \right\} e^{n_I t}$$

Entsprechend folgt

$$y_{2I} + y_{2II} = - \left\{ k_1 f_{21}(n_I) + k_2 \left( \frac{\partial f_{21}(n_I)}{\partial n_I} + f_{21}(n_I) t \right) \right\} e^{n_I t}$$

In diesen Lösungen kommen nun wieder die erforderlichen 2 Integrationskonstanten vor.

## § 9. Tabellen für die Gleichung 4. Grades.

Nach dem vorigen § hängt die Integration der Differentialgleichung von der Auflösung der Gl. 4. Grades ab. Die Auflösung einer solchen Gleichung ist aber bekanntlich eine umständliche Sache und gibt unübersichtliche Resultate. Nun ist es zunächst von Wichtigkeit, zu wissen, ob die Wurzeln reell oder komplex sind, denn im letzten Falle kommt eine wirkliche Schwingung zustande, im 1. Falle eine aperiodische Bewegung. Diese Frage kann man jedoch nach dem Sturmschen Satz entscheiden, ohne die Gleichung wirklich auflösen zu müssen. Auch die Anwendung des Sturmschen Satzes erfordert einen ziemlich großen Rechenaufwand. Ich habe die Resultate in der folgenden Tabelle zusammengestellt, die je nach den Vorzeichen der  $d$ ,  $b$ ,  $c$  die Anzahl  $n$  der reellen Wurzeln angibt. Verschwindet eine der Größen  $d$ ,  $b$ ,  $c$ , so müssen, wie die Tabelle zeigt, noch weitere Größen berechnet werden.

$d$	$b$	$c$	$n$	= Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung
$> 0$	$> 0$	$> 0$	4	$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$ *  wenn zur Abkürzung gesetzt ist.  $b = 3 a_1^2 - 8 a_2$  $b_1 = 2(a_1 a_2 - 6 a_3)$  $b_2 = a_1 a_3 - 16 a_4$  $c = b(3 a_1 b_1 - 2 a_2 b + 4 b_2) - 4 b_1^2$  $c_1 = b(3 a_1 b_2 - a_2 b) - 4 b_1 b_2$  $d = c_1(b_1 c - b c_1) - b_2 c_2$
		$< 0$	0	
	$< 0$		0	
$< 0$			2	
$d = 0$	$D > 0$		4	
$c \neq 0$	$D < 0$		2	
$c = 0$	$c_1 \neq 0$	$b > 0$	2	
		$b < 0$	0	
	$c_1 = 0$	$D' \geq 0$	4	
		$D' < 0$	0	
$b = 0$	$b_1 \neq 0$	$c' > 0$		2
		$c' < 0$		0
		$c' = 0$	$D'' \geq 0$	4
			$D'' < 0$	2
	$b_1 = 0$	$b_2 > 0$		2
		$b_2 < 0$		0
		$b_2 = 0$		4

Sind die Wurzeln komplex, so ist es ferner von Wichtigkeit, zu wissen, ob der reelle Teil positiv, negativ oder Null ist, denn im 1. Falle haben wir eine Schwingung mit zunehmender, im 2. Falle eine mit abnehmender Amplitude und im 3. Falle eine ungedämpfte Schwingung. Auch diese Frage kann entschieden werden, ohne die Gleichung auflösen zu müssen, nämlich mit Hilfe des Cauchyschen Residuensatzes. Da aber auch hier ein ziemlicher Rechenaufwand erforderlich ist, habe ich die Resultate in der folgenden Tabelle zusammengestellt, die angibt, wieviel Wurzeln mit positivem, wieviel mit negativem und wieviel ohne reellen Bestandteil vorhanden sind.

Es sind also die reellen Bestandteile aller 4 Wurzeln negativ, falls

$$a_4 > 0, \quad a_1 > 0, \quad e > 0, \quad g < 0,$$

oder anders geschrieben, falls

$$a_1 > 0, \quad a_4 > 0; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$



$a_4$	$a_1$	$e$	$g$	Anzahl der Wurzeln			reellen Bestandteil der Gleichung
				mit pos.	ohne	mit neg.	
-	-	- , 0		3	0	1	$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$ wenn $e = a_1 a_2 - a_3$ $g = a_2^2 + a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3$
		+	-	3	0	1	
			+	1	0	3	
			0	1	2	1	
	+	-	-	1	0	3	
			+	3	0	1	
			0	1	2	1	
		+, 0		1	0	3	
	0	-		3	0	1	
		+		1	0	3	
		0		1	2	1	
+	-	-	-	4	0	0	
			+	2	0	2	
			0	2	2	0	
		+, 0		2	0	2	
	+	- , 0		2	0	2	
		+	-	0	0	4	
			+	2	0	2	
			0	0	2	2	
	0	- , 0		2	0	2	$h = a_2^2 - 4a_4$
		0	$a_2$	$h$			
			- , 0		2	0	2
			+	-	2	0	2
			+, 0		0	4	0

Diese Bedingungen hat Hurwitz auf Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades verallgemeinert [Mathem. Annalen 46 (1875)]

Die Auflösung der biquadratischen Gleichung mit Hilfe der kubischen Resolvente empfiehlt sich nur dann, wenn die kubische Resolvente kein absolutes Glied besitzt. Die Bedingung hierfür ist

$$a_1^3 - 4a_1 a_2 + 8a_3 = 0.$$

	$R_2$	$R_1^2 - 4 R_2$	$R_1$	
<p>Wurzeln der Gleichung:  <math>x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0</math>,  für den Spezialfall.  <math>a_1^2 - 4 a_1 a_2 + 8 a_3 = 0</math>,  wenn zur Abkürzung gesetzt  wird:  <math>R_1 = 4 \frac{a_2}{a_1} - \frac{1}{4} a_1^2</math>,  <math>R_2 = 4 \left[ \left( \frac{a_3}{a_1} \right)^2 - a_4 \right]</math>.</p>	+	+	+	$x_{1,2,3,4} = -\frac{1}{4} a_1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{R_1 \pm 2 \sqrt{R_2}}$
			-	$x_{1,2,3,4} = -\frac{1}{4} a_1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{-R_1 \pm 2 \sqrt{R_2}}$
	+	0	+	$x_1 = x_2 = -\frac{1}{4} a_1, \quad x_{3,4} = -\frac{1}{4} a_1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{R_1 + 2 \sqrt{R_2}}$
			-	$x_1 = x_2 = -\frac{1}{4} a_1, \quad x_{3,4} = -\frac{1}{4} a_1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{-R_1 + 2 \sqrt{R_2}}$
		-		$x_{1,2} = -\frac{1}{4} a_1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{R_1 + 2 \sqrt{R_2}}, \quad x_{3,4} = -\frac{1}{4} a_1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{-R_1 + 2 \sqrt{R_2}}$
			+	$x_{1,2} = x_{3,4} = -\frac{1}{4} a_1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{R_1}$
	0		0	$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -\frac{1}{4} a_1$
			-	$x_{1,2} = x_{3,4} = -\frac{1}{4} a_1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{-R_1}$
-	-			$x_{1,2,3,4} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{1}{2} R_1 + \frac{1}{2} \sqrt{R_1^2 - 4 R_2}} - \frac{1}{4} a_1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} R_1 + \frac{1}{2} \sqrt{R_1^2 - 4 R_2}}$

Dieser Spezialfall ist für uns wichtig, da die beiden Schwingungen dann entweder von gleicher Dämpfung oder von gleicher Frequenz sind. Ich habe die Resultate in der dritten Tabelle zusammengeschrieben.

### § 10. Die Lagrangeschen Gleichungen 2. Form.

Es sei  $E$  eine Funktion von  $y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2$  und  $K_1, K_2$  seien Funktionen von  $y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2$ . Ich entwickle nach Potenzen und breche die Entwicklung von  $E$  nach den quadratischen Gliedern, die Entwicklung von  $K_1$  und  $K_2$  nach den linearen Gliedern ab.

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} E = E_0 &+ \left( \frac{\partial E}{\partial y_1} \right)_0 y_1 + \left( \frac{\partial E}{\partial y_2} \right)_0 y_2 + \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{y}_1} \right)_0 \dot{y}_1 + \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{y}_2} \right)_0 \dot{y}_2 \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_1^2} \right)_0 y_1^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial y_2} \right)_0 y_1 y_2 + \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_2^2} \right)_0 y_2^2 \right. \\ &+ \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \dot{y}_1^2} \right)_0 \dot{y}_1^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \dot{y}_1 \partial \dot{y}_2} \right)_0 \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \dot{y}_2^2} \right)_0 \dot{y}_2^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial \dot{y}_1} \right)_0 y_1 \dot{y}_1 \\ &\left. + 2 \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial \dot{y}_2} \right)_0 y_1 \dot{y}_2 + 2 \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_2 \partial \dot{y}_1} \right)_0 y_2 \dot{y}_1 + 2 \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_2 \partial \dot{y}_2} \right)_0 y_2 \dot{y}_2 \right] \end{aligned} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} K_1 &= K_{10} + \left( \frac{\partial K_1}{\partial y_1} \right)_0 y_1 + \left( \frac{\partial K_1}{\partial y_2} \right)_0 y_2 \\ &\quad + \left( \frac{\partial K_1}{\partial \dot{y}_1} \right)_0 \dot{y}_1 + \left( \frac{\partial K_1}{\partial \dot{y}_2} \right)_0 \dot{y}_2, \\ K_2 &= K_{20} + \left( \frac{\partial K_2}{\partial y_1} \right)_0 y_1 + \left( \frac{\partial K_2}{\partial y_2} \right)_0 y_2 \\ &\quad + \left( \frac{\partial K_2}{\partial \dot{y}_1} \right)_0 \dot{y}_1 + \left( \frac{\partial K_2}{\partial \dot{y}_2} \right)_0 \dot{y}_2 \end{aligned} \right.$$

Nun bilde ich die Gleichungen

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial E}{\partial y_1} &= K_1, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{y}_2} \right) - \frac{\partial E}{\partial y_2} &= K_2 \end{aligned} \right.$$

Es ergibt sich:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \dot{y}_1^2} \right)_0 \dot{y}_1 + \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial \dot{y}_2} \right)_0 \dot{y}_2 + \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial \dot{y}_1} \right)_0 \dot{y}_1 + \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial \dot{y}_2} \right)_0 \dot{y}_2 \\ \quad - \left( \frac{\partial E}{\partial y_1} \right)_0 - \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \dot{y}_1^2} \right)_0 \dot{y}_1 - \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial \dot{y}_2} \right)_0 \dot{y}_2 \\ \quad - \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial \dot{y}_1} \right)_0 \dot{y}_1 - \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial \dot{y}_2} \right)_0 \dot{y}_2 = K_1, \\ \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \dot{y}_2^2} \right)_0 \dot{y}_2 + \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial \dot{y}_2} \right)_0 \dot{y}_1 + \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_2 \partial \dot{y}_2} \right)_0 \dot{y}_2 + \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_2 \partial \dot{y}_1} \right)_0 \dot{y}_1 \\ \quad - \left( \frac{\partial E}{\partial y_2} \right)_0 - \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \dot{y}_2^2} \right)_0 \dot{y}_2 - \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial \dot{y}_2} \right)_0 \dot{y}_1 \\ \quad - \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_2 \partial \dot{y}_1} \right)_0 \dot{y}_1 - \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_2 \partial \dot{y}_2} \right)_0 \dot{y}_2 = K_2 \end{array} \right.$$

Vergleiche ich diese Gleichung mit der Diffgl. § 8, so ist

$$(5) \quad \begin{aligned} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{y}_1} \right)_0 + K_{10} &= 0, \\ \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{y}_2} \right)_0 + K_{20} &= 0 \end{aligned}$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \dot{y}_1^2} \right)_0 - \left( \frac{\partial K_1}{\partial \dot{y}_1} \right)_0 = a_{11}, & \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial \dot{y}_2} \right)_0 - \left( \frac{\partial K_1}{\partial \dot{y}_2} \right)_0 = c \\ \quad - \left( \frac{\partial K_1}{\partial y_1} \right)_0 = b_{11}, & \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_2 \partial \dot{y}_1} \right)_0 - \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial \dot{y}_2} \right)_0 - \left( \frac{\partial K_1}{\partial y_2} \right)_0 = l \\ - \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \dot{y}_1^2} \right)_0 - \left( \frac{\partial K_1}{\partial y_1} \right)_0 = c_{11}, & - \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial \dot{y}_2} \right)_0 - \left( \frac{\partial K_1}{\partial y_2} \right)_0 = c' \\ \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \dot{y}_2^2} \right)_0 - \left( \frac{\partial K_2}{\partial \dot{y}_2} \right)_0 = a_{22}, & \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial \dot{y}_2} \right)_0 - \left( \frac{\partial K_2}{\partial \dot{y}_1} \right)_0 = c'' \\ \quad - \left( \frac{\partial K_2}{\partial y_2} \right)_0 = b_{22}, & \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial \dot{y}_2} \right)_0 - \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_2 \partial \dot{y}_1} \right)_0 - \left( \frac{\partial K_2}{\partial y_1} \right)_0 = l' \\ - \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \dot{y}_2^2} \right)_0 - \left( \frac{\partial K_2}{\partial y_2} \right)_0 = c_{22}, & - \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial \dot{y}_2} \right)_0 - \left( \frac{\partial K_2}{\partial y_1} \right)_0 = c. \end{array} \right.$$

Bei mechanischen Schwingungen ist  $E$  die kinetische Energie und  $K_1, K_2$  sind die Lagrangeschen Kraftkomponenten (Hamel:

I. Nr. 329). Ist  $\left(\frac{\partial K_1}{\partial y_2}\right)_0 = \left(\frac{\partial K_2}{\partial y_1}\right)_0 = 0$ , so ist nach (6)  $-b_{21}$ . Das ist in den folgenden Beispielen der Fall  
 Räumliches Pendel (Hamel: El. M. Nr. 67) Es ist (Abb. 35)

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} m l^2 \sin^2 (\alpha + \varphi_1) (\omega + \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} m l^2 \varphi_1^2, \\
 \left(\frac{\partial E}{\partial \varphi_1}\right)_0 &= \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 \sin 2\alpha, \\
 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi_1^2}\right)_0 &= m l^2, \\
 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi_1^2}\right)_0 &= m l^2 \omega^2 \cos 2\alpha, \\
 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2}\right)_0 &= m l^2 \omega \sin 2\alpha, \\
 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi_2^2}\right)_0 &= m l^2 \sin^2 \alpha, \\
 K_1 &= -m g l \sin (\alpha + \varphi_1), \\
 K_{10} &= -m g l \sin \alpha, \\
 \left(\frac{\partial K_1}{\partial \varphi_1}\right)_0 &= -m g l \cos \alpha
 \end{aligned}$$

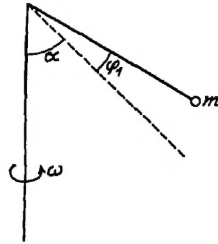


Abb. 35.

Oh (5) und (6) ist daher

$$\begin{aligned}
 \omega &= \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}}, \\
 \tau_{11} &= m l^2, \\
 \tau_{11} &= -m l^2 \omega^2 \cos 2\alpha + m g l \cos \alpha = \frac{m g l \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}, \\
 \tau_{22} &= m l^2 \sin^2 \alpha, \\
 \tau_{12} &= -b_{21} = -m l^2 \omega \sin 2\alpha = -2 m l \sin \alpha \sqrt{g l \cos \alpha}
 \end{aligned}$$

Schiff mit Schiffskreisel (Hamel El. M. Nr. 332, Hort: v § 83, Foppel T. M. VI, 220)

Elektron im magnetischen Felde (Hort T. Schw. § 121).

Zentrifugalregulator (Hort T. Schw. § 60)

Schwingendes Luftfahrzeug (Hort T. Schw. § 70)